

Modelo Numérico de Elementos Finitos para el Estudio de Regiones D Tridimensionales mediante Modelos de Bielas y Tirantes

Por:

Carlos Meléndez Gimeno

Julio 2012

Autor / Author: Carlos Meléndez Gimeno		Fecha / Date: 06/07/2012	
Título / Title Modelo Numérico de Elementos Finitos para el Estudio de Regiones D Tridimensionales mediante Modelos de Bielas y Tirantes			
Directores del trabajo / Supervisores: Pedro Miguel Sosa – Luis Pallarés Rubio		Código / Code: CST/MIH	Nº páginas / Pages: 140
Departamento / Department: INGENIERÍA DE LA CONSTRUCCIÓN Y PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL			
Universidad / University: UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA		 UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA	
Palabras clave / Keywords: Hormigón armado; método de bielas y tirantes; método de los elementos finitos; proyecto regiones D tridimensionales / Reinforced concrete; strut-and-tie method; finite element method; three dimensional D Regions.			
Código Unesco: 3305/05 Ciencias tecnológicas / Tecnología de la construcción / Tecnología del Hormigón			

RESUMEN

El método de bielas y tirantes se ha convertido en la herramienta preferente para el proyecto de las regiones D de estructuras de hormigón armado, en las que se producen campos tensionales complejos y no es válida la hipótesis de Navier-Bernoulli. Se trata de un método de diseño consistente, racional, simple de aplicar, validado experimentalmente, y consecuentemente numerosas normas lo han incorporado. Su aplicación a regiones D bidimensionales está bastante extendida. Sin embargo, tal y como señala el Boletín 61 de la fib (2011) [23], apenas existen directrices para su uso en regiones D cuyo comportamiento en rotura es marcadamente tridimensional. Como ejemplo de elementos estructurales que constituyen regiones D tridimensionales pueden citarse los encepados sobre pilotes, las zapatas rígidas o los diafragmas para la conexión de elementos en puentes segmentados.

Aunque el método de bielas y tirantes es conceptualmente sencillo, el proyectista puede encontrar dificultades en la definición de un modelo adecuado para una determinada región D, ya que esta elección se fundamenta básicamente en la experiencia e intuición. Existen herramientas informáticas aplicables a regiones D bidimensionales que facilitan esta tarea, pero no para regiones D tridimensionales.

En este trabajo fin de máster se ha desarrollado un modelo numérico para estructuras de hormigón armado tridimensionales que es capaz de generar automáticamente el campo tensional a partir de la configuración de armado proporcionada por el proyectista. Este modelo numérico se ha implementado en MATLAB para posteriormente aplicarlo al análisis de un bloque de anclaje y un encepado de pilotes. De la comparación de los resultados obtenidos con los presentados por otros autores se puede concluir que, al menos para los elementos estudiados, el modelo numérico propuesto es capaz de generar modelos de bielas y tirantes tridimensionales coherentes y de predecir correctamente la carga última. No obstante existen algunos aspectos del modelo numérico que pueden ser mejorados, siendo el objetivo último de la investigación desarrollar una herramienta informática para el proyecto de regiones D tridimensionales similares a las que ya existen para 2D.

ABSTRACT

The strut-and-tie method has become the most used tool for the design of D-Regions in reinforced concrete structures, where there is a complex stress field and Navier-Bernoulli hypothesis is not valid. It is a consistent, rational, easy to use, experimentally validated method, and therefore many design codes have included it. Its application to bidimensional D-Regions is widespread. Nevertheless there is little guidance for D-Regions with a tridimensional behavior in failure, as remarked by Bulletin 61 fib (2011) [23]. Some examples of structural elements that belong to the group of three-dimensional D-Regions are pile caps, pad foundations and diaphragms in segmental bridges.

Although the strut-and-tie method is conceptually simple, finding a suitable model for a certain D-Region can be tedious, since this choice is based on experience and intuition of the designer. There are some computer tools that help to overcome these difficulties for bidimensional D-Regions, but not for 3D.

In this master thesis a numerical model has been developed for three-dimensional reinforced concrete structures which is capable to generate automatically the stress field based on the bars location proposed by the designer. Based on this field a 3D strut-and-tie model can be suggested. This numerical model has been implemented in MATLAB and applied to the analysis of an anchorage block and a pile cap. Through comparison between the obtained results and other author's results it can be stated that at least for the assessed elements the proposed numerical model is able to generate consistent three-dimensional strut-and-tie models and predict correctly the ultimate strength. However there are some points of the numerical model that can be improved, since the final aim of this research program is to develop a computer-based tool for the design of three-dimensional D-Regions similar to those available in 2D.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco al Ministerio de Ciencia e Innovación de España la financiación al proyecto BIA2009-11369, dentro del cual ha tenido lugar el presente trabajo fin de máster. En la situación económica actual se debe valorar todavía más si cabe el apoyo económico a la investigación.

Me gustaría agradecer a mis tutores Pedro Miguel Sosa y Luis Pallarés Rubio el interés que siempre han mostrado, que representa una motivación para seguir trabajando. Gracias también por la oportunidad de poder participar en este proyecto de investigación.

No puedo olvidarme de las personas con las que he compartido despacho durante las horas empleadas en la realización de este trabajo, Karen, Javier, Jaime, Moisés, Agustín,... Aunque no sea mucho el tiempo desde que nos conocemos, siempre me han hecho sentir muy a gusto.

A mis compañeros y amigos del máster: Juan Ángel, José, Ion, Andrés, y por partida múltiple a las Cristinas y los Javiers. Algunos ya nos conocíamos, otros no, pero igualmente hacen que me lleve un muy buen recuerdo de este año.

A mis amigos de Teruel y de Valencia por los buenos ratos que pasamos. Aunque cada vez vaya siendo más difícil poder juntarse, me alegra saber que todo sigue igual y que están ahí siempre que se les necesita.

Para el final guardo el agradecimiento más especial para mis padres Vicente y Pilar y mi hermana Marta. Con su ejemplo me han enseñado el valor del trabajo, pero también me han recordado la importancia de disfrutar de la vida y de no preocuparse demasiado por los problemas.

ÍNDICE

RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
ÍNDICE	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABLAS	ix
1 Introducción	1-1
1.1 Motivación	1-1
1.2 Descripción general del trabajo	1-2
1.3 Antecedentes	1-3
1.4 Organización del documento	1-3
2 Estado del conocimiento	2-1
2.1 Introducción	2-1
2.2 Proyecto de regiones D	2-2
2.3 Partes fundamentales de un modelo de bielas y tirantes	2-3
2.3.1 Bielas	2-3
2.3.2 Tirantes	2-4
2.3.3 Nudos	2-4
2.4 Procedimiento de diseño	2-5
2.4.1 Identificación y delimitación de las regiones D	2-6
2.4.2 Definición del sistema de fuerzas equivalente	2-7
2.4.3 Definición del modelo de bielas y tirantes	2-7
2.4.4 Cálculo de las fuerzas resultantes en bielas y tirantes	2-9
2.4.5 Cálculo de la armadura necesaria	2-10
2.4.6 Comprobación de bielas y nudos	2-11
2.4.7 Distribución del área calculada en cada tirante en armadura real dispuesta y diseño del anclaje de las armaduras	2-11
2.5 Modelos de bielas y tirantes para regiones D bidimensionales	2-11
2.5.1 Capacidad resistente de bielas, tirantes y nudos	2-12
2.5.2 Recomendaciones angulares	2-17
2.5.3 Elementos estructurales que constituyen regiones D bidimensionales	2-17

2.6	Herramientas informáticas para el proyecto y análisis de regiones D bidimensionales	2-23
2.6.1	Introducción	2-23
2.6.2	Rückert (1991) [38]	2-24
2.6.3	CAST–Computer-Aided Strut-and-Tie (Tjhin y Kuchma(2004)[48])	2-26
2.6.4	Método de los Elementos Finitos Bielas y Tirantes MEFBT (Miguel et al. (2002) [32])	2-30
2.7	Modelos de bielas y tirantes para regiones D tridimensionales	2-32
2.7.1	Capacidad resistente de las zonas nodales tridimensionales	2-33
2.7.2	Recomendaciones angulares	2-35
2.7.3	Elementos estructurales que constituyen regiones D tridimensionales	2-35
2.8	Herramientas informáticas para el proyecto y análisis de regiones D tridimensionales	2-38
2.8.1	Leu et al. (2006) [27]	2-38
3	Objetivos específicos y alcance	3-1
3.1	Objetivos específicos	3-1
3.2	Alcance	3-3
4	Descripción del modelo numérico propuesto	4-1
4.1	Planteamiento general del método de los elementos finitos	4-1
4.1.1	Introducción	4-1
4.1.2	Formulación del método de los elementos finitos	4-2
4.2	Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales	4-8
4.2.1	Método de Newton-Raphson	4-8
4.2.2	Métodos globalmente convergentes	4-10
4.3	Descripción del elemento finito	4-15
4.3.1	Justificación de la elección	4-15
4.3.2	El tetraedro lineal	4-15
4.3.3	Cálculo de la matriz \mathbf{B}^e	4-19
4.3.4	Fuerzas de volumen	4-22
4.4	Matriz constitutiva \mathbf{D}^e	4-22
4.4.1	Modelo de fisuración	4-24
4.4.2	Matriz constitutiva secante \mathbf{D}_s^e	4-24
4.4.3	Matriz constitutiva tangente \mathbf{D}_T^e	4-28
4.5	Matriz de rigidez \mathbf{K}^e	4-32
4.6	Contribución armado	4-32
4.6.1	Representación de la armadura	4-32
4.6.2	Descripción del elemento finito	4-33
4.6.3	Comportamiento no lineal del acero	4-33
4.6.4	Matriz de rigidez armadura \mathbf{K}^e	4-34
4.7	Estructura de la herramienta informática	4-35
4.8	Entorno MATLAB	4-37
4.9	Limitaciones del modelo numérico	4-37

5	Aplicación del modelo numérico a elementos estructurales	5-1
5.1	Bloqueo de anclaje	5-1
5.1.1	Descripción	5-1
5.1.2	Modelización	5-3
5.1.3	Análisis elástico lineal	5-3
5.1.4	Definición del modelo de bielas y tirantes	5-5
5.1.5	Análisis del modelo de bielas y tirantes propuesto	5-6
5.1.6	Soluciones alternativas	5-12
5.1.7	Comparación de soluciones	5-16
5.2	Encepado de pilotes	5-18
5.2.1	Descripción	5-18
5.2.2	Modelización	5-20
5.2.3	Campo tensional resultante	5-20
5.2.4	Análisis de los resultados obtenidos	5-21
5.2.5	Soluciones alternativas	5-30
6	Conclusiones y futuras líneas de investigación	6-1
6.1	Conclusiones	6-1
6.2	Futuras líneas de investigación	6-3
7	Bibliografía	7-1

LISTA DE FIGURAS

Figura II. 1: Tipos básicos de bielas (Schlaich y Schäfer (2001)[41])	2-3
Figura II. 2: Partes fundamentales de un modelo de BT (Miguel et al. (2009) [31]).....	2-4
Figura II. 3: Esquema procedimiento de diseño con el MBT	2-5
Figura II. 4: Delimitación de las regiones D.....	2-6
Figura II. 5: Evolución durante la optimización topológica de una pila de puente y propuesta de modelo de BT (Liang et al. (2002) [28]).....	2-8
Figura II. 6: Descomposición de un modelo estáticamente indeterminado en dos modelos isostáticos (Miguel y Pallarés (2011) [33]).....	2-10
Figura II. 7: Tipos de biela en una región de discontinuidad (a) biela prismática no fisurada (b) biela prismática con fisuración paralela a las bielas (c) biela prismática con fisuración no paralela a las bielas (d) biela en botella en zona fisurada armada (e) biela en botella en zona fisurada no armada y (f) biela confinada (Tjhin y Kuchma (2002) [47])	2-13
Figura II. 8: Recomendaciones angulares para modelos bidimensionales	2-17
Figura II. 9: Modelo de BT para ménsula corta	2-18
Figura II. 10: Modelo de BT para soporte con dos ménsulas cortas [3]	2-19
Figura II. 11: Soporte con dos ménsulas cortas tras rotura [3].....	2-19
Figura II. 12: Modelo de BT para viga de gran canto [3].....	2-20
Figura II. 13: Modelo de BT para viga de gran canto con hueco [3]	2-21
Figura II. 14: Modelo de BT para pantalla con huecos [3]	2-21
Figura II. 15: Modelo de BT para apoyo a media madera (izq. [3] y der. [42])	2-22
Figura II. 16: Modelo de BT para apoyo a media madera con disposición de armado alternativa (ACI SP-273 (2011) [4]).....	2-22
Figura II. 17: Modelo de BT para diafragma (cortante) [4]	2-23
Figura II. 18: Modelo a partir de las trayectorias [38]	2-25
Figura II. 19: Representación esquemática de la estructura interna de CAST [48]	2-26
Figura II. 20: Ejemplo tratamiento de una zona nodal por descomposición en triángulos [48].....	2-27
Figura II. 21: Salida de resultados tras el análisis de la celosía [48].....	2-29
Figura II. 22: Representación esquemática de la estructura interna de CAST2FEA [36]	2-29
Figura II. 23: Representación esquemática de la estructura interna de MEFBT.....	2-30
Figura II. 24: Análisis de una pantalla con huecos sometida a cargas laterales con el MEFBT (Miguel y Fernández (2011) [34])	2-32
Figura II. 25: Biela hexagonal a partir de zona nodal paralelepípeda.....	2-33
Figura II. 26: Resultados de ensayos triaxiales de compresión sobre probetas cúbicas de hormigón (Chuan-zhi et al. (1987) [14])	2-34
Figura II. 28: Planta encepados ensayados por Adebar et al. (1990) [5]	2-36
Figura II. 27: Modelo de BT tridimensional para un encepado de cuatro pilotes (Adebar y Zhou (1996) [6]).....	2-37
Figura II. 29: Modelo de BT para encepado con pilote en tracción [4].....	2-38
Figura II. 30: Optimización topológica bidimensional aplicada a una viga a flexión [27]	2-39
Figura II. 31: Área efectiva vs. radio de influencia para una biela de compresión (ud.cm)[27]	2-39

Figura IV. 1: Método de Newton-Raphson para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales (Delgado (2008) [17])	4-9
Figura IV. 2: Residuos obtenidos aplicando el método Newton-Raphson aplicado a dos estructuras con diferente comportamiento	4-11
Figura IV. 3: Tetraedro de cuatro nodos o lineal (Felipa (2012) [20]).....	4-15
Figura IV. 4: Descripción coordenadas tetraédricas naturales [20].....	4-16
Figura IV. 5: Matriz de rigidez tangente vs. matriz de rigidez secante	4-23
Figura IV. 6: Representación discreta de la armadura (Delgado (2008) [17])	4-33
Figura V. 1: Configuración bloque de anclaje	5-2
Figura V. 2: Discretización con elementos finitos del bloque de anclaje de hormigón	5-3
Figura V. 3: Flujos de tracciones y compresiones del análisis elástico lineal del bloque de anclaje ...	5-4
Figura V. 4: Campo tensional del análisis elástico-lineal y modelo de BT propuesto.....	5-5
Figura V. 5: Discretización del tirante en función del mallado seleccionado	5-6
Figura V. 6: Evolución del residuo con el número de iteraciones.....	5-6
Figura V. 7: Campo tensional resultante del modelo propuesto para el bloque de anclaje	5-7
Figura V. 8: Variación de la fuerza a lo largo de los tirantes.....	5-9
Figura V. 9: Vista en planta del campo tensional generado y dirección de la biela C_{6-8}	5-10
Figura V. 10: Modelo de BT del bloque de anclaje propuesto por el FIB (2002)	5-12
Figura V. 11: Campo tensional resultante del modelo de FIB.....	5-13
Figura V. 12: Modelo de BT del bloque de anclaje obtenido por eliminación de armaduras	5-15
Figura V. 13: Fuerza actuante en cada uno de los elementos que forman los tirantes	5-15
Figura V. 14: Vista en planta de la disposición de armado, y posición de columna y pilotes.....	5-19
Figura V. 15: Discretización con elementos finitos del encepado de cuatro pilotes de hormigón ...	5-20
Figura V. 16: Campo tensional generado por la herramienta informática	5-21
Figura V. 17: Deformaciones longitudinales medidas para varios estados de carga [5]	5-22
Figura V. 18: Representación gráfica 3D de la deformación ϵ_x en el plano de corte $X=0.4m$	5-22
Figura V. 19: Variación de la deformación ϵ_x para distintas fibras en el plano $X=0.4m$ ($P=320kN$) ..	5-23
Figura V. 20: Tensión σ_x para distintos planos de corte $X=cte.$ (Unidades m. y KPa)	5-24
Figura V. 21: Variación de la tensión σ_x para distintas fibras en los planos de corte $X=0.2m$, $X=0.4m$, $X=0.6m$	5-25
Figura V. 22: Curva carga-desplazamiento obtenida del modelo numérico vs. carga de plastificación y última de Suzuki et al. (1998) y Souza et al. (2007)	5-26
Figura V. 23: Tensión armaduras	5-27
Figura V. 24: Variación de la deformación ϵ_x para distintas fibras para $Y=0.15m$	5-29
Figura V. 25: Curva fuerza-desplazamiento obtenida del modelo numérico para comportamiento del hormigón en compresión elástico lineal y elasto-plástico.....	5-30
Figura V. 26: Vista en planta de las zonas plastificadas para el modelo elasto-plástico para diferentes cargas	5-31
Figura V. 27: Encepado con armado y pilotes dispuestos en cruz.....	5-32
Figura V. 28: Esquema bielas y tirantes con distribución de armadura en banda y en cruz	5-33
Figura V. 29: Curva fuerza-desplazamiento obtenida del modelo numérico para encepado con armado en banda y encepado con armado en cruz con misma cuantía de armado total	5-33
Figura V. 30 Curva fuerza-desplazamiento obtenida del modelo numérico para encepado con área de columna $30x30cm$ y $20x20cm$	5-34

LISTA DE TABLAS

Tabla V. 1: Relación de fuerzas resultantes en cada uno de los elementos del análisis de la estructura de barras para el modelo propuesto	5-7
Tabla V. 2: Relación de fuerzas resultantes en cada uno de los elementos del análisis de la estructura de barras para el modelo propuesto por FIB (2002)	5-13
Tabla V. 3: Comparación soluciones propuestas para bloque de anclaje	5-16
Tabla V. 4: Deformación máxima de hormigón y acero para distintos niveles de carga.....	5-25
Tabla V. 5: Comparación de los resultados experimentales obtenidos por Suzuki et al. (1998), los numéricos de Souza et al. (2007) y los numéricos del modelo numérico desarrollado.....	5-26

1 Introducción

1.1 Motivación

El método de las bielas y tirantes (en adelante MBT) es un método aplicable para el proyecto de ciertas zonas de las estructuras de hormigón donde se producen campos tensionales complejos debido a la presencia de discontinuidades en la geometría o las cargas, más comúnmente conocidas como regiones D. El MBT proporciona una herramienta de diseño más consistente y racional que los métodos empíricos empleados tradicionalmente para este tipo de regiones y como consecuencia numerosas normas para el proyecto de estructuras de hormigón han incorporado este método. Algunos ejemplos son la americana ACI 318 (2011) [2], la canadiense CSA (2004) [16], el eurocódigo EC-2 (2004) [18] y la norma española EHE-08 (2008) [19]. Además, debido a que el MBT se basa en el teorema del límite inferior de la elasticidad, su utilización permite cierta libertad a los proyectistas para disponer la armadura en la estructura.

La aptitud del MBT para el proyecto de regiones D bidimensionales ha sido verificada experimentalmente y está bastante extendida. Existen numerosos ejemplos que pueden consultarse y algunas herramientas informáticas (Bairán (2012) [9], *MEFBT* (2002)[32], Rückert (1991) [38], CAST (2004) [48]) para ayudar al proyectista a la hora de abordar su diseño. Ménsulas cortas, apoyos a media madera, vigas de gran canto, codos y nudos de pórticos, zonas con cambios bruscos de sección, paneles sometidos a tensión plana con huecos,... son algunos de los ejemplos de elementos estructurales que pueden ser estudiados y proyectados con el método.

Sin embargo, la aplicación del MBT a regiones D cuyo comportamiento en rotura es marcadamente tridimensional se encuentra escasamente desarrollada. De acuerdo con Reineck et al. (fib bulletin 61, 2011) [23]:

“Hay muy pocas directrices para la aplicación de modelos 3D. A menudo se ha recurrido a la descomposición de una región 3D en modelos planos para evitar la complejidad de estos modelos. Pero cuando esta analogía 2D no es posible, como es el caso de los grandes encepados, la formulación de un modelo espacial puede ser bastante compleja, así como el encontrar geometrías congruentes para las zonas nodales 3D. Para geometrías complejas de zonas nodales 3D, los factores de eficacia desarrollados para estados biaxiales de tensiones pueden ser inapropiados. Por consiguiente, debe llevarse a cabo una mayor investigación sobre estos aspectos, así como deben ser definidos los criterios adecuados de rotura para la resistencia de los nodos 3D.”

Como ejemplos de regiones con marcado comportamiento tridimensional pueden citarse los encepados sobre pilotes, las zapatas rígidas, los cálices de cimentación de soportes prefabricados, los diafragmas para la conexión de los elementos en puentes segmentados, entre otros.

En el plano experimental, la mayoría de los ensayos versan fundamentalmente sobre encepados de pilotes con carga exclusivamente vertical centrada y monótona. En el ámbito de análisis numérico no se dispone en la actualidad de herramientas informáticas que permitan el uso del MBT en modelos tridimensionales, aunque sí que existen algunos modelos teóricos.

1.2 Descripción general del trabajo

Debido a la ausencia de una herramienta informática para el estudio de regiones D tridimensionales con el MBT, la finalidad de este trabajo fin de máster es desarrollar un modelo numérico en 3D capaz de generar automáticamente modelos de bielas y tirantes (en adelante modelos de BT) a partir exclusivamente de la configuración de armado proporcionada por el proyectista. Posteriormente para comprobar la validez del mismo se aplicará al estudio de algunas regiones D tridimensionales y se comparará con los resultados obtenidos por otros autores.

El desarrollo del presente trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación BIA2009-11369 con título “Estudio Experimental y Numérico de Regiones D Planas y Espaciales en Estructuras de Hormigón. Aplicación a Apoyos a Media Madera y Cálices” financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

1.3 Antecedentes

El antecedente directo del modelo numérico que se plantea en este trabajo fin de máster es el programa *MEFBT* (Método de Elementos Finitos Bielas y Tirantes) (Miguel et al. (2002) [32], Sola et al. (2011) [42]) desarrollado en la unidad docente de Hormigón del Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil de la Universidad Politécnica de Valencia. Se trata de un modelo bidimensional que permite el dimensionamiento de una región a de partir de la configuración de armado que se desea disponer, sin necesidad de tener que definir la geometría completa del modelo de BT.

Existen otros modelos materializados en herramientas informáticas para regiones D bidimensionales entre los que cabe destacar el programa *Computer-Aided Strut-and-Tie CAST* desarrollado en la University of Illinois [36] [48]. Para regiones D tridimensionales existen algunos modelos teóricos de elementos finitos que generan el modelo de BT aplicando técnicas de optimización topológica (Leu et al. (2006) [27], Liang et al. (2002) [28]).

1.4 Organización del documento

Este documento se ha organizado en los siguientes capítulos:

Capítulo 1 – Introducción:

Se plantean los aspectos que motivan el presente trabajo fin de máster, así como los objetivos generales a cubrir. También se hace referencia brevemente a los antecedentes.

Capítulo 2 – Estado del conocimiento

Se revisa el estado actual del conocimiento del MBT. Tras una breve introducción histórica, se describe el procedimiento de diseño para el proyecto de regiones D según el MBT. A continuación se comentan los aspectos más relevantes de su aplicación, ejemplos de elementos estructurales que pueden ser estudiados con el método y se describen algunas herramientas informáticas existentes que facilitan el proyecto de estas zonas, tanto para regiones D bidimensionales como tridimensionales.

Capítulo 3 – Objetivos específicos y alcance

Se establecen los objetivos específicos que se pretenden alcanzar con la investigación así como las limitaciones de la misma.

Capítulo 4 – Descripción del modelo numérico propuesto

Tras realizar una introducción al método de los elementos finitos y a los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, se exponen los aspectos más relevantes del modelo numérico desarrollado. Se describe el elemento finito elegido para la modelización y la manera en la que se ha tratado para considerar la fisuración del hormigón. Finalmente un

esquema presenta la estructura de la herramienta informática desarrollada y se mencionan las limitaciones del modelo.

Capítulo 5 – Aplicación del modelo numérico a elementos estructurales

Se estudian varias regiones D tridimensionales mediante la aplicación del modelo numérico implementado para comprobar la aptitud del mismo. Algunos de los ejemplos que se presentan han sido estudiados por otros autores y se realiza una comparación de los resultados obtenidos.

Capítulo 6 – Conclusiones y futuras líneas de investigación

Se presentan las conclusiones derivadas de la investigación realizada y se apuntan futuras líneas de investigación que sería interesante estudiar.

Capítulo 7 - Bibliografía

Bibliografía empleada durante la redacción del presente documento.

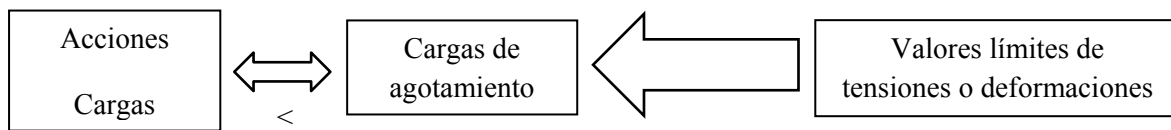
2 Estado del conocimiento

2.1 Introducción

Desde Marti (1985) [29] y Schlaich et al. (1987) [40], el MBT ha ido ganando aceptación como herramienta de análisis y diseño de estructuras de hormigón armado y pretensado. Así lo recogen numerosas normativas como la española EHE-08 [19], el eurocódigo EC-2 (2004) [18], la americana ACI-318 (2011) [2] y la canadiense CSA (2004) [16], entre otras. Aunque el método se puede aplicar a cualquier parte de una estructura, en la práctica se limita a aquellas zonas conocidas como regiones de discontinuidad (regiones D). De hecho el método nace de la necesidad de realizar un diseño racional para estas regiones D, que históricamente se han proyectado en base a fórmulas empíricas o semiempíricas, en oposición al dimensionamiento basado en principios bien establecidos del resto de zonas de no discontinuidad.

El MBT consiste en sustituir una región de una estructura por una estructura sencilla de barras articuladas que represente su comportamiento. Esta idea de sustituir una estructura de hormigón por una equivalente formada por bielas comprimidas de hormigón y tirantes de acero data de inicios del siglo XX con las ideas de Ritter (1899) [37] y Mörsch (1908) [35]. Marti (1985) [29] y sobre todo Schlaich et al. (1987) [40] generalizaron esta idea para su aplicación a cualquier región de una estructura y no sólo a vigas.

El MBT está basado en el teorema del límite inferior de la plasticidad, según el cual si para una estructura se encuentra un campo de tensiones que es estáticamente admisible con la carga aplicada, y las tensiones que aparecen no superan en ningún punto la resistencia de los materiales, se puede afirmar que el valor de la carga aplicada es una cota inferior del valor de la carga última de la estructura. Para que esto se cumpla la estructura debe ser lo suficientemente dúctil para permitir la redistribución de esfuerzos. Así pues, en contra del diseño seccional donde la solución es única, con el MBT puede haber varias soluciones válidas. Sin embargo, lo que en principio puede resultar una ventaja para el proyectista, puede llegar a ser un problema para sistemas complejos debido precisamente a esa flexibilidad que ofrece.



Modelos de comportamiento en rotura:
comportamiento elasto-plástico, fisurado

Una de las ventajas que presentan los modelos de BT es que ayudan al proyectista a entender el comportamiento mecánico de estas zonas, lo que deriva en diseños más eficientes. Sin embargo su implementación puede requerir mucho tiempo de cálculo, ya que se trata de un proceso iterativo. Existen herramientas informáticas que ayudan a reducir el tiempo de cálculo, algunas de las cuales se presentan en este capítulo.

También el proyectista debe ser consciente de que el procedimiento se basa en un diseño por capacidad resistente máxima, pero no tiene en cuenta flechas ni aberturas de fisura, que pueden ser condicionantes en el estado límite de servicio. Existen algunas recomendaciones para evitar este tipo de problemas.

2.2 Proyecto de regiones D

Las estructuras de hormigón pueden dividirse en regiones B y regiones D. A las zonas en las que es válida la hipótesis de distribución plana de deformaciones de Navier-Bernouilli se le conoce como regiones B. En estas zonas el estado tensional se puede obtener fácilmente a partir de los esfuerzos en cada sección. Existen otras zonas, conocidas como regiones de discontinuidad o regiones D, donde la distribución de deformaciones es no lineal y no es válida la teoría de Navier-Bernouilli.

La norma española EHE-08 [19] define las regiones D en el artículo 24.1 como:

“Son regiones D (regiones de discontinuidad) las estructuras o partes de una estructura en las que no sea válida la teoría general de flexión, es decir, donde no sean aplicables las hipótesis de Bernouilli-Navier o Kirchhoff”

Esta discontinuidad puede deberse a tres causas:

- (i) Discontinuidad geométrica: se da en aquellas zonas donde existe un cambio brusco en la geometría.
- (ii) Discontinuidad estática: zonas donde existen cargas puntuales.
- (iii) Discontinuidad generalizada: para aquellas zonas donde se dan varios factores que impiden la aplicación de la hipótesis de Navier-Bernoulli. Ejemplos típicos de este tipo de discontinuidad son las vigas de gran canto y las zapatas rígidas.

Aunque no existe ninguna limitación que impida la aplicación del MBT para regiones B, los métodos de cálculo resistente existentes para estas zonas son más precisos que el MBT, por lo que la aplicación del MBT se limita a las regiones D.

2.3 Partes fundamentales de un modelo de bielas y tirantes

Las partes fundamentales de un modelo de BT son:

2.3.1 Bielas

Son los elementos sometidos a compresión. Se suele materializar con hormigón debido a su capacidad resistente a compresión, aunque también se podría disponer armaduras comprimidas para aumentar su resistencia.

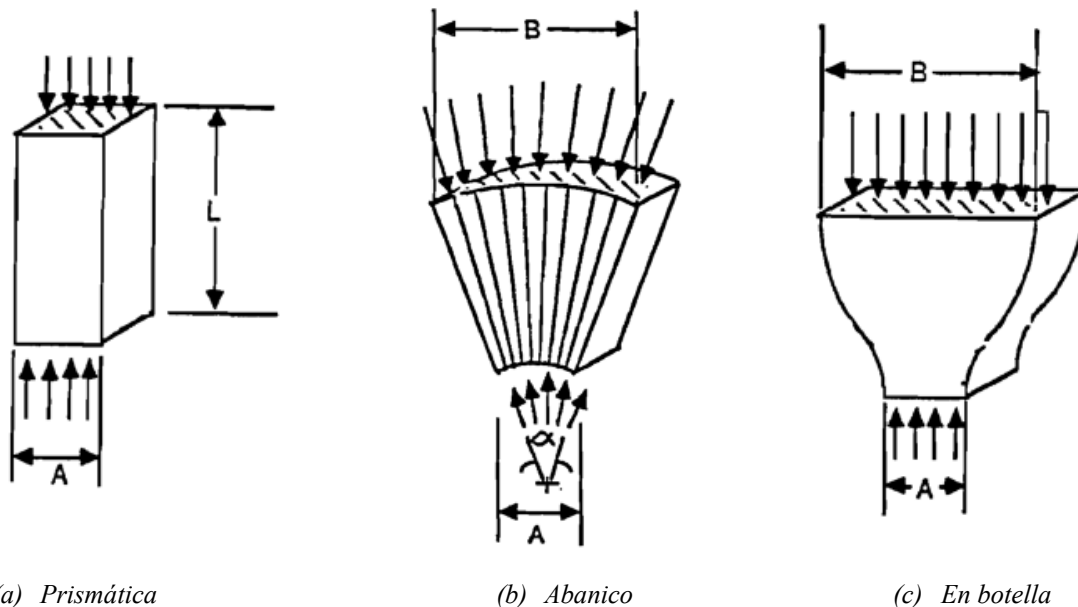


Figura II. 1: Tipos básicos de bielas (Schlaich y Schäfer (2001)[41])

Existen fundamentalmente tres tipos básicos de bielas (Figura II. 1):

- (i) Bielas prismáticas: se producen en zonas donde pueda existir una limitación bien física o bien mecánica para que se produzca la difusión de las tensiones. El cordón comprimido de una viga sometida a flexión sería un ejemplo de este tipo de bielas.
- (ii) Bielas en abanico: se producen en zonas donde no existe ninguna limitación para que se produzca una dispersión del flujo de tensiones. Este tipo de biela se da por ejemplo en el apoyo extremo de una viga.
- (iii) Bielas en botella: cuando la dispersión de tensiones es posible en todas las direcciones, como ocurre por ejemplo en las cargas sobre macizos.

2.3.2 Tirantes

Son los elementos resistentes sometidos a tracción. En una estructura de hormigón se materializan con armadura pasiva o armadura activa. Las armaduras activas únicamente se pueden considerar cuando sean adherentes.

2.3.3 Nudos

Son las zonas del modelo donde confluye bielas y/o tirantes. A pesar de que se representan en el modelo por el punto de intersección entre estos elementos, en realidad son zonas nodales donde se producirá el equilibrio entre las bielas y tirantes y donde se producirá un estado de tensiones biaxial o triaxial, lo que influirá en su capacidad de resistente. Más adelante se comentarán los diferentes tipos de nudos que pueden aparecer en un modelo de BT.

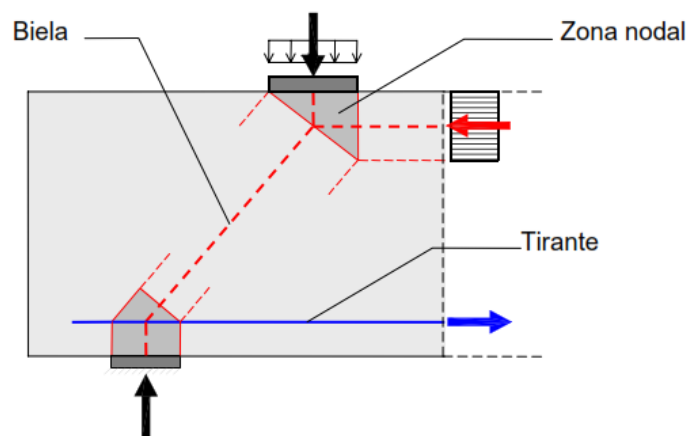


Figura II. 2: Partes fundamentales de un modelo de BT (Miguel et al. (2009) [31])

2.4 Procedimiento de diseño

El siguiente diagrama de flujo muestra el procedimiento a seguir para el diseño de un elemento estructural de hormigón armado mediante el MBT.

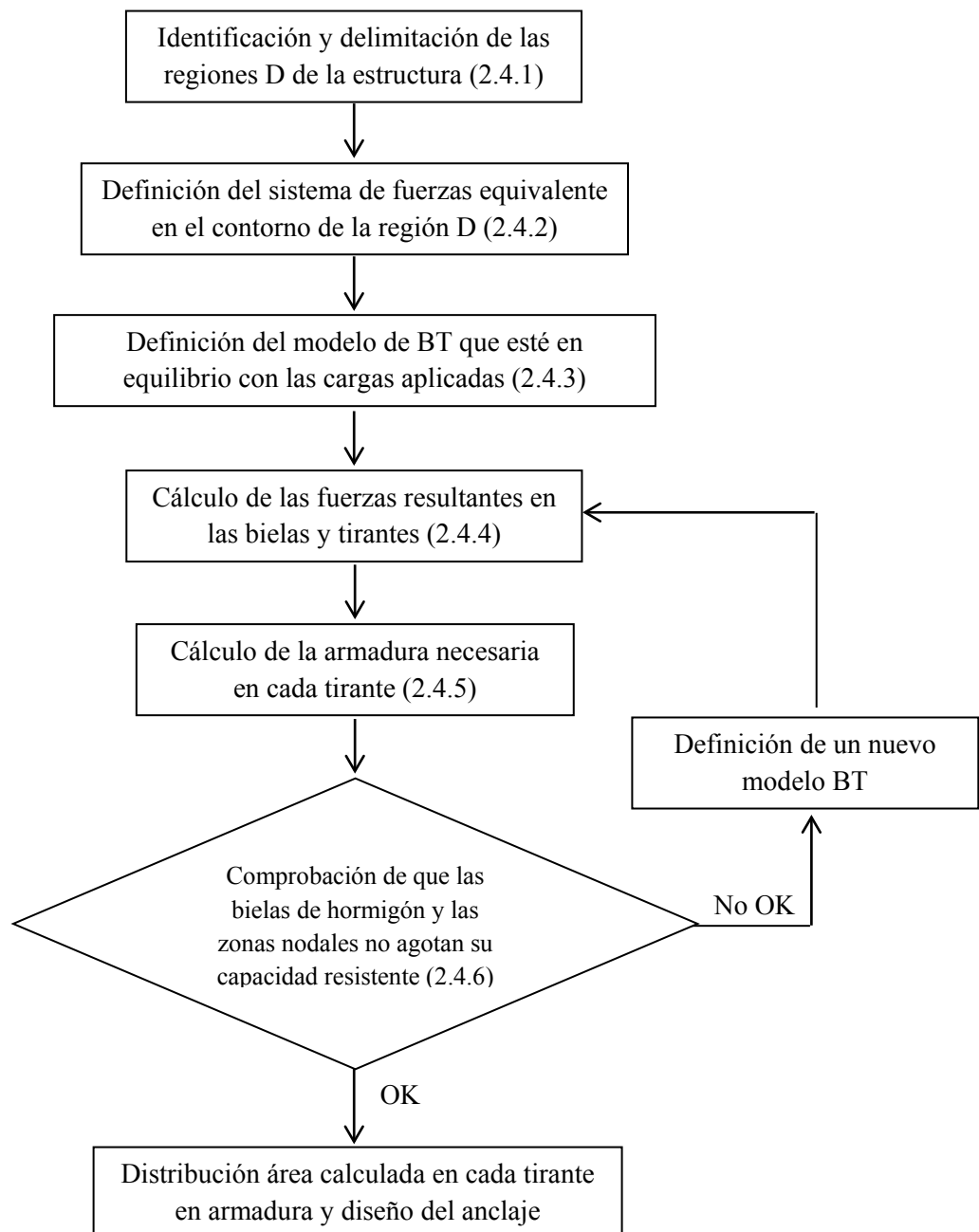


Figura II. 3: Esquema procedimiento de diseño con el MBT

Previamente a aplicar el MBT, el proyectista debe ser consciente de que existen una serie de normas que deben cumplirse para garantizar que la estructura proyectada sea segura:

1. El modelo de BT debe estar en equilibrio con las fuerzas aplicadas mayoradas.
2. La capacidad resistente de las bielas, tirantes y zonas nodales debe ser igual o superior a las fuerzas que aparecen en estos elementos.
3. Para una aproximación inicial al problema es suficiente considerar únicamente los ejes de las bielas y tirantes para generar el modelo. No obstante, en las etapas posteriores se deben considerar sus dimensiones.
4. Dos bielas no pueden solaparse. Como las dimensiones de las bielas se obtienen considerando la resistencia efectiva del hormigón, si dos bielas se solaparan se excedería la capacidad resistente del hormigón.
5. Se permite que un tirante cruce una biela u otro tirante.
6. Existen limitaciones sobre los ángulos que pueden formar bielas y tirantes (ver apartado 2.5.2).

2.4.1 Identificación y delimitación de las regiones D

Una vez identificadas las regiones D en la estructura, el proyectista debe proceder a delimitarlas. Según el principio de St. Venant el efecto localizado de una carga concentrada o una discontinuidad geométrica muere aproximadamente a una distancia igual al canto del elemento. Siguiendo este principio se considera que una región D se extiende a ambos lados de una discontinuidad (de carga o de geometría) una distancia igual al canto del elemento.

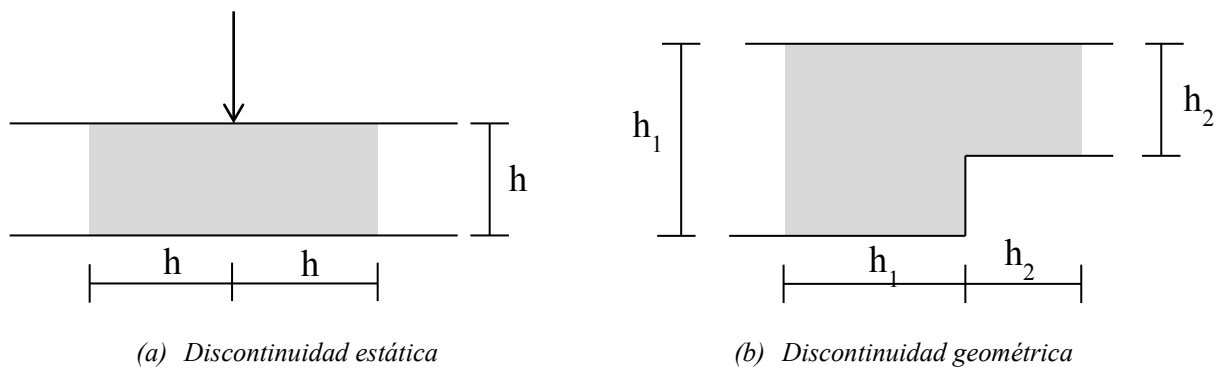


Figura II. 4: Delimitación de las regiones D

En regiones D por discontinuidad generalizada la totalidad del elemento estructural debe considerarse como una región (vigas de gran canto, zapatas, ménsulas corta,...).

2.4.2 Definición del sistema de fuerzas equivalente

Una vez identificada y delimitada la región D es necesario determinar las cargas aplicadas sobre dicha región, que pueden proceder:

- (i) Cargas exteriores: cargas que estén directamente aplicadas sobre la región D. Pueden ser cargas concentradas, distribuidas en superficie o distribuidas en volumen. Para poder después generar un modelo de BT es necesario que las cargas distribuidas se simplifiquen a un sistema de fuerzas puntuales equivalente.
- (ii) Sección de continuidad entre las regiones B y D: al igual que en cualquier sección de una estructura, se va a producir unas tensiones en la sección que conecta la región D con el resto de la estructura adyacente. Estas tensiones se deben considerar como cargas sobre la región D y su distribución se puede calcular fácilmente de igual manera que se realizaría en cualquier región B. Del mismo modo que se ha comentado para las cargas distribuidas, el campo tensional debe simplificarse a un sistema de fuerzas puntuales equivalente.
- (iii) Reacciones: en caso de que existan coacciones a los desplazamientos en algún punto también se producirán reacciones que tendrán que considerarse. Al igual que las cargas exteriores las reacciones pueden ser concentradas (ejemplo aparato de apoyo) o distribuidas (ejemplo cimentación superficial).

Finalmente es necesario comprobar que el sistema de fuerzas equivalente está en equilibrio.

El grado de simplificación a la hora de obtener el sistema de fuerzas puntuales equivalente puede tener una influencia considerable en el modelo de BT resultante así como en los resultados finales. El número de fuerzas en el que se debe descomponer las cargas distribuidas dependerá del grado de precisión requerido.

2.4.3 Definición del modelo de bielas y tirantes

A continuación se dan una serie de reglas prácticas que deben seguirse para la construcción del modelo de BT de forma intuitiva, si bien el resultado final dependerá mucho de la experiencia y habilidad del proyectista.

- Las bielas y tirantes deben empezar en los puntos de aplicación de las fuerzas equivalentes calculadas previamente y deben tener su misma dirección.
- Para que se pueda dar la transmisión de las fuerzas externas de uno a otro extremo es necesario unos esfuerzos internos en la región D que desvíen las trayectorias iniciales generando una estructura interna.
- Todo el modelo de BT debe estar contenido dentro de la región D.
- La presencia de una armadura doblada supone la presencia de una biela y otro tirante.

Se pueden encontrar en la bibliografía varios ejemplos en los que se explica paso a paso la obtención de un modelo BT para estructuras sencillas (Miguel et al. (2009) [31]).

Existen otras maneras de abordar el problema de definición de un modelo BT:

- Usando ejemplos estándar o adaptando estos ejemplos que hayan sido estudiados previamente y para los que se haya definido modelos BT.
- Aplicando el conocido como método de trayectoria de cargas (*load path method*) (Schlaich y Schäfer (1987) [40]), donde el proyectista debe intuir el flujo de tensiones que se va a producir y proponer un modelo de acorde.
- Para elementos más complejos se puede comenzar con un análisis con elementos finitos suponiendo un comportamiento elástico lineal del material. Después las bielas se alinean con la resultante de las tensiones de compresión dentro de un rango de $\pm 15^\circ$ y los tirantes se alinean con la resultante de las tensiones de tracción dentro de un rango de $\pm 15^\circ$.
- Generando el modelo tras la aplicación de un algoritmo de optimización topológica de una estructura continua donde se van eliminando aquellos elementos que menos trabajan (Liang et al. (2002) [28]). Existen algoritmos similares que optimizan estructuras de barras por eliminación que también se pueden aplicar (Ali et al. (2001) [7]).

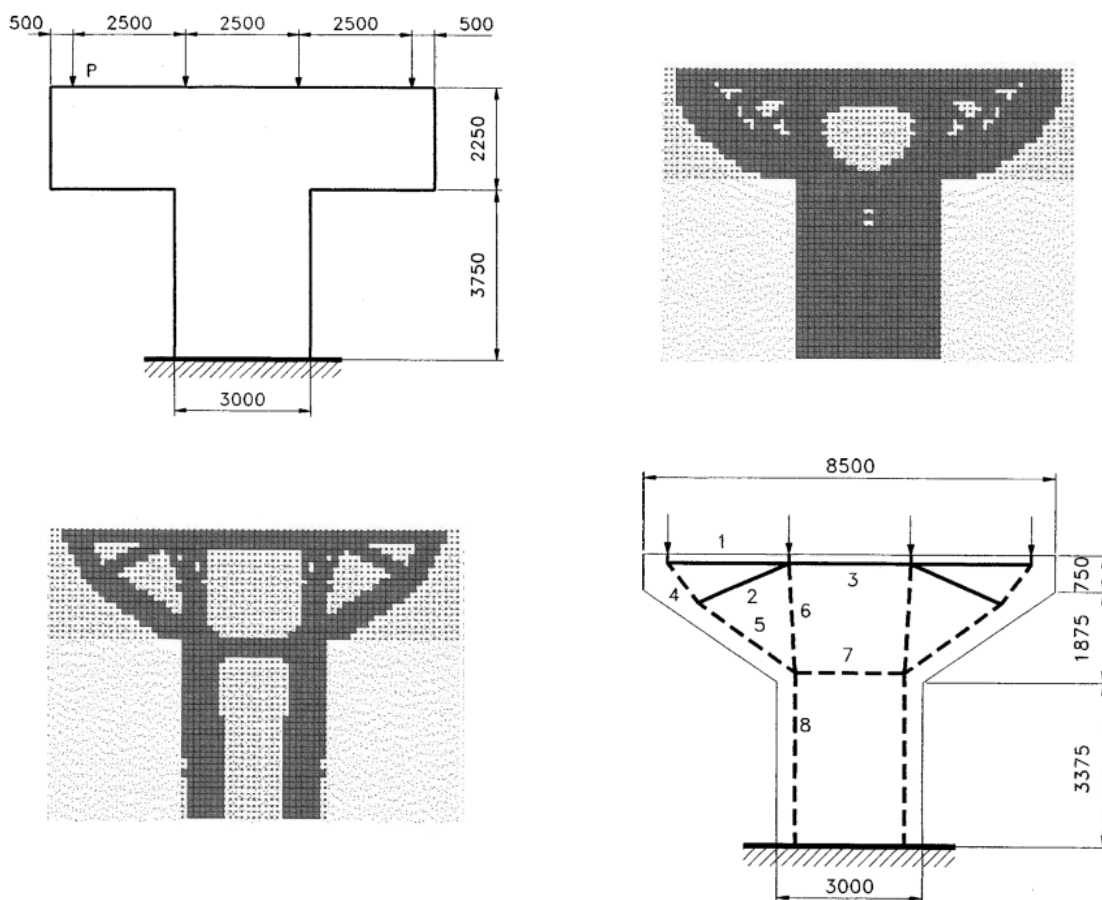


Figura II. 5: Evolución durante la optimización topológica de una pila de puente y propuesta de modelo de BT (Liang et al. (2002) [28])

Para un problema determinado existen diferentes modelos de BT que pueden ser propuestos y que cumplan con las especificaciones requeridas para el estado límite último. Sin embargo, algunos serán más eficientes que otros y el proyectista deberá de buscar siempre los diseños óptimos. El diseño óptimo es aquel que minimiza la energía de deformación, lo que se traduce en un menor volumen de armado. Cada posible solución para una misma región D requerirá una ductilidad diferente. Esta ductilidad es necesaria para que se pueda producir una redistribución de tensiones antes de la rotura. A pesar de que el diseño de regiones D se aplica para el estado límite último, es importante que el modelo BT propuesto se aproxime lo máximo posible al flujo de tensiones obtenido del análisis elástico lineal para reducir el requerimiento de ductilidad, que suele ser escasa en estructuras de hormigón. Además, con modelos de BT que se aproximen al campo tensional elástico lineal se garantiza un mejor comportamiento para el estado límite de servicio reduciendo la fisuración.

A pesar de la ayuda que representan ciertas herramientas numéricas desarrolladas para facilitar la definición del modelo BT (Bairán (2012) [9], *MEFBT* (2002) [32], *CAST* (2004) [48]), debe ser el proyectista el que tome la decisión final, ya que el modelo resultante dependerá de la disposición de las armaduras y de los puntos de paso de las bielas que éste defina. Para facilitar el proceso constructivo se tratará de disponer siempre que sea posible armadura ortogonal o paralela a los paramentos de la estructura, incluso cuando ello derive en una pérdida de eficiencia.

2.4.4 Cálculo de las fuerzas resultantes en bielas y tirantes

Una vez definida la estructura interna de barras que forma el modelo de BT se debe proceder al cálculo de las fuerzas que aparecen en cada uno de los elementos. Los elementos que se encuentren sometidos a compresión constituirán las bielas y los elementos a tracción los tirantes.

2.4.4.1 Modelos isostáticos vs. modelos hiperestáticos

Dependiendo del modelo de BT propuesto, la estructura interna resultante será una estructura isostática o hiperestática. Al igual que ocurre en cualquier estructura, para la obtención de las fuerzas que aparecerán en cada miembro en una estructura hiperestática es necesario utilizar las ecuaciones de compatibilidad y calcular la rigidez de cada uno de los elementos previamente. Para los modelos de BT, estas barras que conforman la estructura equivalente no existen físicamente y por tanto no es posible asignarles una geometría que permita calcular su rigidez.

En algunas ocasiones, los modelos hiperestáticos serán preferibles ya que se aproximarán más al estado tensional elástico, lo que implica un mejor comportamiento en servicio y una menor demanda de ductilidad. En estas situaciones existen tres posibilidades:

- (i) Resolver el problema por superposición de dos modelos isostáticos estáticamente determinados y asignar a cada uno de ellos una fracción de la carga aplicada, ya que para estructuras isostáticas se pueden obtener las fuerzas que actúan en las barras directamente del equilibrio.

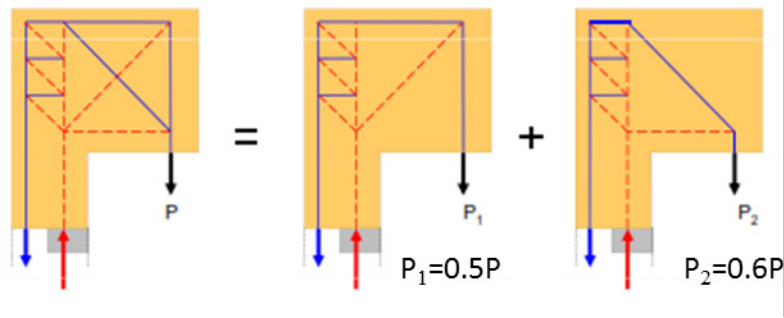


Figura II. 6: Descomposición de un modelo estáticamente indeterminado en dos modelos isostáticos (Miguel y Pallarés (2011) [33])

- (ii) Suponer que los tirantes más solicitados de la celosía han plastificado y sustituirlos en el modelo por las fuerzas equivalentes a su plastificación, sustituyendo un número de tirantes tal que la estructura resultante sea estáticamente determinada. Hay que tener en cuenta no obstante la necesidad de compatibilidad de deformaciones y la limitada ductilidad del hormigón.
- (iii) Algunos autores (Leu et al. (2006) [27] y Liang et al. (2002) [28]) sí que proponen el cálculo de estructuras de bielas y tirantes hiperestáticas mediante el empleo de las ecuaciones de compatibilidad. Para obtener la rigidez de cada uno de los elementos se basan en los elementos que permanecen tras haber realizado una optimización topológica de la estructura.

2.4.5 Cálculo de la armadura necesaria

A partir de la fuerza que debe ser resistida por cada tirante se procede al cálculo de la armadura necesaria para cada uno de ellos. Cada tirante puede representar una armadura o un conjunto de varias armaduras. En este último caso la posición del tirante en el modelo debe coincidir con el centro de gravedad del conjunto de armaduras.

Normalmente es necesario disponer además de las armaduras para materializar los tirantes otras adicionales para reducir la fisuración en determinadas zonas de fisuración que no queden identificados como tal en el modelo de BT. Por ejemplo, dependiendo del grado de simplificación a la hora de considerar las fuerzas distribuidas se puede obtener un modelo que no identifique tracciones en algunas zonas del hormigón que en la realidad sí que se dan. También, a pesar de que en el modelo las trayectorias de compresión en el hormigón se simplifican a una biela, no se debe olvidar que los estados de tensiones que representan son en realidad mucho más complejos. En ocasiones estas tracciones serán tan pequeñas que podrán ser absorbidas por el propio hormigón, pero en otras se hará necesaria la disposición de armadura.

2.4.6 Comprobación de bielas y nudos

En cuanto a las bielas se debe comprobar que su capacidad resistente no se vea superada en ninguna de las secciones. Esta capacidad está condicionada no sólo por la propia capacidad resistente del hormigón si no también por la geometría de la biela y por la posible existencia de armaduras que la atraviesen, entre otras. Posteriormente se procederá a una descripción más detallada de cómo debe realizarse la comprobación de la capacidad resistente de las bielas.

También se debe garantizar que no se exceda la capacidad resistente de los nudos. Como se verá a continuación existen diferentes tipos de nudos y en función del estado tensional que se dé se deberán realizar unas u otras comprobaciones.

En caso de que se supere la capacidad resistente de alguna biela o algún nudo se debe proponer un nuevo modelo o bien modificar las características del hormigón, hasta obtener un sistema que cumpla todas las especificaciones.

2.4.7 Distribución del área calculada en cada tirante en armadura real dispuesta y diseño del anclaje de las armaduras

Finalmente el área de armadura necesaria calculada se debe materializar en número de redondos, con la condición de que el área dispuesta para cada tirante sea superior a la calculada según 2.4.5. Para garantizar que la armadura pueda llegar a alcanzar la fuerza requerida por el tirante será necesario disponer una longitud adicional de armadura en cada uno de los extremos del tirante igual o superior a la longitud de anclaje calculada según la normativa.

2.5 Modelos de bielas y tirantes para regiones D bidimensionales

La aplicación del MBT a regiones D bidimensionales está bastante extendida y aceptada por numerosas normas. Las limitaciones en cuanto a la capacidad resistente del hormigón y de los nudos en función del estado de tensiones o deformaciones del hormigón están bien establecidas y también la geometría de las zonas nodales. Se han realizado numerosos ensayos experimentales para validar el MBT para regiones D bidimensionales, algunos recogidos en la bibliografía (Kuchma et al. (2008) [25], Ley et al. (2007) [26]).

En este apartado se comentan los aspectos más relevantes recogidos en la normativa para el proyecto de regiones D bidimensionales mediante el MBT y se presentan algunos elementos estructurales que constituyen regiones D bidimensionales.

2.5.1 Capacidad resistente de bielas, tirantes y nudos

2.5.1.1 Bielas

La capacidad resistente de una biela está determinada por el área de hormigón que constituye la biela y la resistencia efectiva f_{cu} del hormigón.

$$C_d = A_c f_{cu} \quad (2.1)$$

donde:

$$f_{cu} = v f_c' \quad (2.2)$$

siendo v un factor de efectividad o factor reductor. Con este factor se considera en el cálculo la influencia que pueden tener algunos factores en la resistencia a compresión del hormigón. Hay que tener en cuenta que el valor que define la resistencia del hormigón se obtiene habitualmente de ensayos monoaxiales y por tanto no corresponde siempre con la situación real que se da dentro de una biela. Fundamentalmente existen tres factores que afectan al factor de efectividad que son: (i) los efectos de la duración de la aplicación de la carga, (ii) la fisuración de las bielas y (iii) el confinamiento del hormigón. En función de la importancia que se le da a cada uno de los factores el valor de f_{cu} varía de un código a otro. Otros factores como el armado, las fuerzas de fricción y el efecto de engranamiento de áridos en piezas fisuradas tienen también cierta influencia.

La instrucción española EHE-08 [19], en el artículo 40.3, clasifica las bielas en cuatro grupos para asignar diferentes factores reductores.

- (i) Bielas en zonas con estados de compresión uniaxial: se puede considerar un diagrama rectangular de tensiones o un diagrama parábola rectángulo. Se admite que la resistencia efectiva del hormigón sea igual a la de cálculo.

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.3)$$

donde α_{cc} es el coeficiente que tiene en cuenta el cansancio, que puede tomar valores entre 0.85 y 1.

- (ii) Bielas en zonas con fisuración paralela a las bielas: cuando el hormigón está fisurado es capaz de transmitir compresiones, pero es necesario aplicar un coeficiente reductor debido a las tracciones que aparecen en la dirección transversal a la principal. Este tipo de fisuración se produce por la difusión del flujo de compresiones de una biela, siendo necesario que la armadura transversal esté suficientemente anclada. En estas situaciones se reduce la resistencia del hormigón a $0.70 f_{cd}$.

- (iii) Bielas en zonas con fisuración no paralela a las bielas: se debe aplicar un coeficiente reductor de 0.60. Este tipo de fisuración se produce cuando las armaduras dispuestas no son ortogonales a las bielas como ocurre por ejemplo en las bielas diagonales en una viga sometida a flexión.
- (iv) Bielas en zonas con fisuras de gran abertura: el coeficiente reductor que se aplica a estas bielas es de 0.40. Se da en elementos sometidos a tracción o en las bielas que se forman para resistir los esfuerzos rasantes en las uniones de las secciones en T entre las alas y el alma.

El EC-2 [18] recomienda otros valores para la resistencia del hormigón a considerar, aunque son muy similares a los del EHE-08. Para bielas en las que no haya tensiones transversales o estén sean de compresión se puede considerar una resistencia del hormigón igual a la de cálculo. Para bielas con tensiones de tracción en su dirección transversal la resistencia de cálculo se reducirá según la siguiente fórmula:

$$\sigma_{Rd,max} = 0.6\nu' f_{cd} \quad (2.4)$$

$$\nu' = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (2.5)$$

Aunque la normativa española no contempla el efecto del confinamiento, se podría plantear aumentar la capacidad en función del grado de confinamiento. Como se deriva de los ensayos biaxiales, el aumento de la tensión transversal sobre el hormigón produce un aumento de su capacidad resistente.

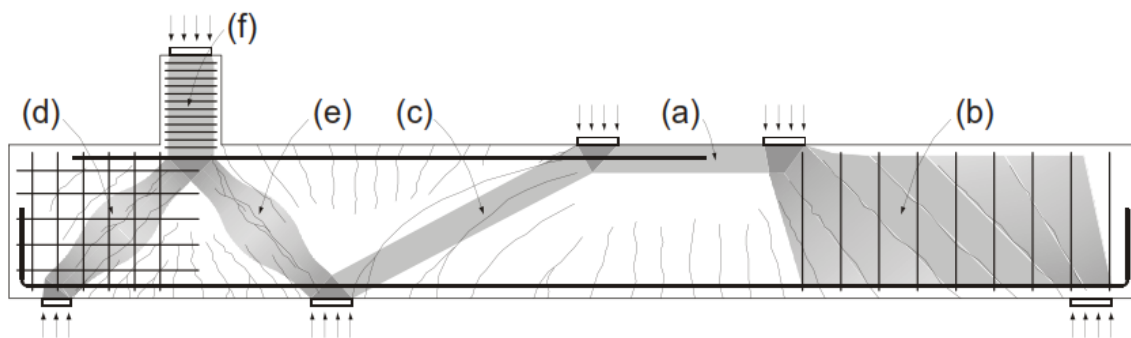


Figura II. 7: Tipos de biela en una región de discontinuidad (a) biela prismática no fisurada (b) biela prismática con fisuración paralela a las bielas (c) biela prismática con fisuración no paralela a las bielas (d) biela en botella en zona fisurada armada (e) biela en botella en zona fisurada no armada y (f) biela confinada (Tjhin y Kuchma (2002) [47])

Para considerar la contribución de la armadura dispuesta en la dirección de la biela (como ocurre por ejemplo en el cordón comprimido de una viga sometida a flexión) se suma a la capacidad resistente del hormigón la fuerza de compresión que absorbe la armadura. Para obtener esta fuerza se debe considerar la deformación que tendrá el acero cuando agote el hormigón.

Para el cálculo del volumen contribuyente de hormigón se deberá tener en cuenta en caso de que la biela esté atravesada por armadura activa postesa la reducción de sección que suponen las vainas. Según la EHE-08 [19] esta disminución de la sección se puede despreciar si la suma de los diámetros de las vainas es inferior a un sexto del ancho de la sección.

2.5.1.2 Tirantes

Los tirantes se materializan por medio tanto de armadura pasiva como de armadura activa. Su tratamiento resulta más sencillo que el de las bielas de hormigón ya que trabajan únicamente en su dirección axial y no se ven influidos por el estado tensional del hormigón que se encuentra a su alrededor. La capacidad de los tirantes se obtiene directamente del producto del área de acero dispuesta y la capacidad resistente del acero.

$$T_d \leq T_u = A_s \sigma_{sd} \quad (2.6)$$

Para las armaduras pasivas se limita la tensión de cálculo del acero a 400 MPa. Con esta limitación se pretende satisfacer el estado límite de servicio en fisuración sin necesidad de realizar un análisis adicional. En realidad lo que se está imponiendo con esta limitación de tensión es que la deformación máxima del acero no supere el 2‰.

En cuanto a las armaduras activas, si son adherentes pueden considerarse como tirantes. Su capacidad resistente se obtiene como diferencia de la resistencia de cálculo de la armadura activa y el valor de cálculo de la fuerza de pretensado.

$$T_u = A_p f_{pd} - \gamma_p P_k = A_p \Delta \sigma_{pd} \quad (2.7)$$

donde P_k es el valor utilizado para calcular el sistema de fuerzas equivalente al pretensando. $\Delta \sigma_{pd}$ está limitado también a 400 MPa.

Se recomienda que las armaduras activas no adherentes no se consideren como tirantes resistentes en el modelo de BT. Sí que se tendrán en cuenta las fuerzas puntuales que introduce en la región D.

2.5.1.3 Nudos

En el modelo de BT los nudos están representados por puntos donde se produce un cambio en la dirección de las fuerzas internas por la intersección de bielas y/o tirantes. En realidad esta desviación se produce en una zona con unas dimensiones determinadas que se conoce como zona nodal donde las fuerzas actuantes deben estar en equilibrio.

En función del estado tensional existente en un nudo se pueden distinguir dos tipos de nudos: (i) nudos singulares y (ii) nudos distribuidos. Sobre los primeros se debe comprobar que no se exceda su capacidad resistente ya que el estado tensional al que pueden estar sometidos puede ser más desfavorable que el de las bielas que confluyen en él. Este tipo de nudos se da cuando existe una restricción geométrica que limita el área en la que se puede materializar el

encuentro de las bielas y/o tirantes. En cuanto a los nudos distribuidos, como no se produce un estado tensional crítico no es necesario realizar ninguna comprobación.

Para comprobar la capacidad resistente de las zonas nodales es necesario determinar en primer lugar la geometría de la zona nodal. Esta geometría depende de la línea de acción de las bielas, tirantes y de las fuerzas externas actuantes sobre el nudo, y de los anchos y ángulos de las bielas que confluyen en el nudo. Después se debe verificar que en ningún punto se alcanza la condición de rotura bajo un estado biaxial o triaxial de tensiones. Las normas suelen aplicar coeficientes reductores. Así la EHE-08 [19] permite seleccionar para nudos multicomprimidos una resistencia igual a la de cálculo. En el caso de que sean nudos donde haya tirantes anclados la resistencia de cálculo se debe reducir con un factor de 0.70.

Los nudos se pueden clasificar en cuatro grupos en función del tipo de elementos que confluyen en ellos.

(i) Nudo compresión-compresión-compresión (C-C-C)

La zona nodal generada por el encuentro de tres bielas es un triángulo cuyos vértices quedan definidos por la intersección de las líneas que definen los anchos de cada una de las bielas. En general el triángulo que se forma no tiene sus lados perpendiculares a las líneas de acción que definen las bielas y, por tanto, aparecen tensiones normales y tangenciales en los lados del triángulo. Estas tensiones se pueden obtener para cada lado del triángulo en función del esfuerzo de la biela que actúa sobre el ancho de la biela y el ángulo que forma la línea de acción de la biela con el lado del triángulo.

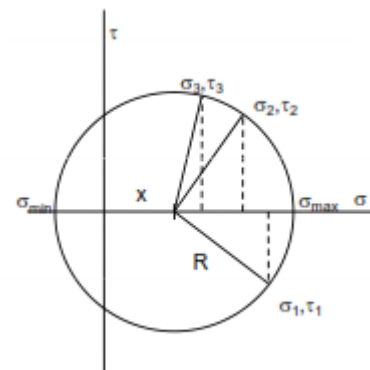
El hecho de que la tensión provocada por las tres bielas sobre el triángulo sea constante reduce la verificación del nudo a una única comprobación. Una vez conocidas las tensiones normales y tangenciales que se dan en dos caras del triángulo el círculo de Mohr queda completamente definido y se puede obtener la tensión máxima y mínima. Se debe comprobar que la tensión máxima no supera la capacidad resistente máxima supuesta para el hormigón.

$$\sigma_m = \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$R = \sqrt{(\sigma_1 - x)^2 + \tau_1^2}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - R$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + R$$



(ii) Nudo compresión-compresión-tracción (C-C-T)

Este nudo queda definido por el encuentro de dos bielas y un tirante. Por lo tanto, dentro de la zona nodal se va a producir una transmisión de esfuerzos entre el tirante y el hormigón por tensiones tangenciales de adherencia. Si las dimensiones de la zona nodal están limitadas por la anchura de las otras dos bielas habrá que comprobar si la longitud en la que se va a producir la transmisión de tensiones es suficiente o no. En la práctica esto se comprueba comparando la longitud de anclaje necesaria para la armadura y la longitud disponible dentro de la zona nodal. Cuando la longitud de la zona nodal sea inferior a la longitud de anclaje, el tirante terminará de “atravesar” la zona nodal sin haber transmitido toda su tensión. Esto provocará la generación de un bloque de compresión tras el tirante que se equilibra con las otras dos bielas que forman el nudo.

Para la verificación de este tipo de zonas nodales existen tres opciones. Para más información consultar la bibliografía (Miguel et al. (2009) [31]).

(iii) Nudo compresión-tracción-tracción (C-T-T)

Normalmente este tipo de nudos se dan por el encuentro de dos tirantes que constituyen una misma armadura pero que se encuentra doblada. Esto genera una biela, que será la que condiciona la rotura del nudo y que deberá ser comprobada. Para comprobar la biela es necesario conocer sus dimensiones, que vienen determinadas por la disposición de las armaduras que forman los tirantes. La anchura de la biela se calcula como:

$$a = \min\left(2R \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \theta, 2R \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \sin(\alpha - \theta)\right) \quad (2.8)$$

donde R es el radio de doblado de las armaduras (que dependerá de su diámetro), α el ángulo que forman los tirantes entre sí y θ el ángulo que forma la biela con uno de los tirantes.

El espesor de la biela a considerar está limitado a 6 veces el diámetro de la armadura transversal y nunca podrá ser mayor que dos veces el recubrimiento mínimo para bielas cercanas al borde.

En este tipo de nudos se debe colocar armadura transversal a la armadura principal para que no se produzca un efecto de corte sobre el hormigón.

(iv) Nudo tracción-tracción-tracción (T-T-T)

Este tipo de nudos aparecen rara vez y no son recomendables. Se debe garantizar para los tres tirantes una longitud de anclaje tal que se puedan generar tres bielas que se equilibren en una zona nodal C-C-C.

(v) Nudos hidrostáticos

En el inicio del MBT se utilizaban zonas nodales hidrostáticas, que todavía se emplean para la comprobación de nudos C-C-C. Este tipo de zonas nodales se da cuando los lados del

triángulo son perpendiculares a la línea de acción de las bielas. En estas circunstancias las tensiones tangenciales son nulas. Este tipo de nudos no requiere comprobación, ya que el círculo de Mohr se reduce a un único punto.

Las zonas nodales hidrostáticas se extendían no sólo a los nudos C-C-C, si no también a los C-C-T y C-T-T asumiendo que los tirantes atraviesan la zona nodal y mediante una placa de anclaje hipotética tras el nudo transmiten una compresión a la zona nodal.

2.5.2 Recomendaciones angulares

Existen ciertas limitaciones en cuanto a los ángulos máximos y mínimos que se pueden dar entre bielas y/o tirantes. Con su cumplimiento se pretenden evitar demandas de redistribución plástica excesivas y problemas de compatibilidad de deformaciones entre bielas y tirantes.

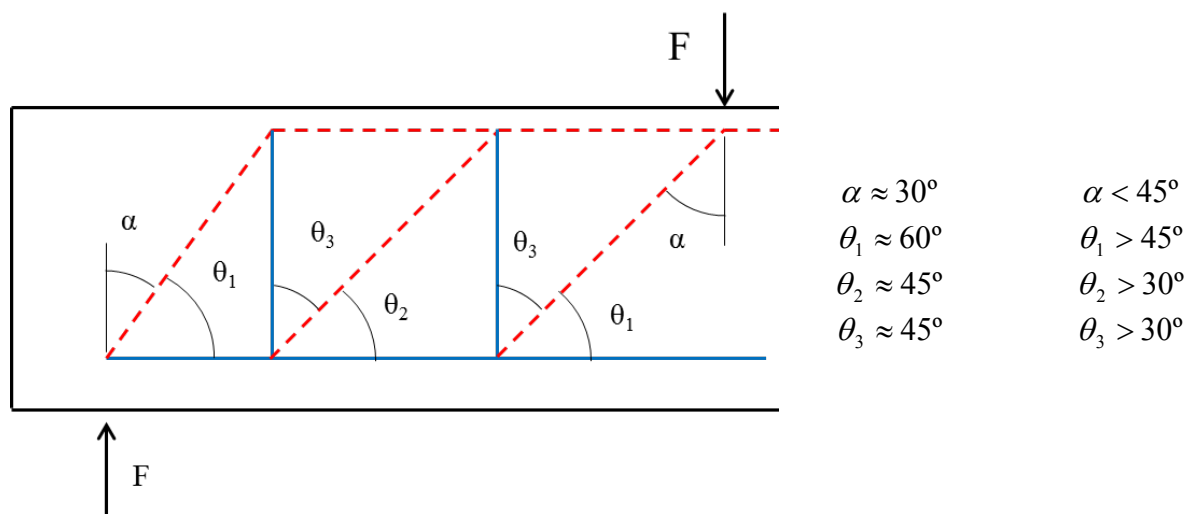


Figura II. 8: Recomendaciones angulares para modelos bidimensionales

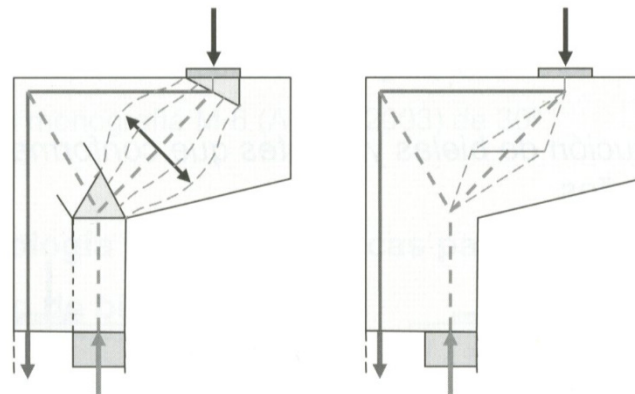
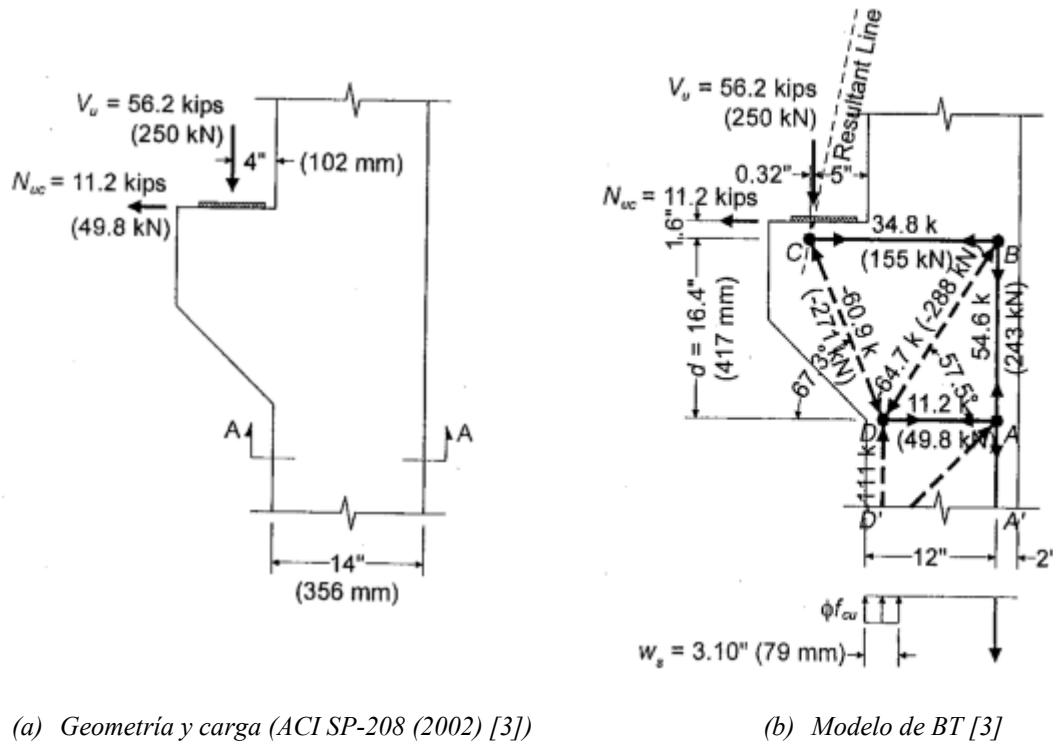
Cuando el ángulo formado por la biela y el tirante sea pequeño, se puede configurar una celosía auxiliar formada por bielas cuya inclinación con el tirante sea próxima a 45° .

2.5.3 Elementos estructurales que constituyen regiones D bidimensionales

El uso de modelos de BT para el proyecto de elementos estructurales que constituyen regiones D bidimensionales está muy extendido. Las fórmulas empíricas que históricamente se han utilizado para estos elementos tienen limitaciones en cuanto a su aplicación. Como alternativa, el MBT permite que el proyectista tenga un mejor conocimiento de cómo se comporta realmente el elemento estructural, lo que deriva finalmente en diseños más eficientes. A continuación se presentan algunos elementos estructurales que constituyen regiones D bidimensionales.

2.5.3.1 Ménsula corta

Se definen como aquellas ménsulas cuyas distancia a entre la línea de acción de la carga vertical principal y la sección adyacente al soporte, es menor o igual que el canto útil en dicha sección d . El canto útil d' medido en el borde exterior del área donde se aplica la carga debe ser mayor o igual que $0.5 d$.



(c) Difusión de las tensiones de compresión en la ménsula corta (Miguel et al. (2009) [31])

Figura II. 9: Modelo de BT para ménsula corta

Según el modelo de BT que se propone es necesario disponer tres tirantes (BC, AB y AD). Adicionalmente es necesario disponer de armadura secundaria horizontal distribuida en un canto igual a $2/3 d$ para controlar la fisuración que puede aparecer transversalmente a la biela CD por difusión de las compresiones (Figura II. 9(c)).

2.5.3.2 Soporte con dos ménsulas cortas

Si las cargas aplicadas sobre las dos ménsulas son de igual valor y simétricas en el modelo de BT aparece un único tirante horizontal. Al igual que para la ménsula corta es necesario disponer de armadura horizontal secundaria para controlar la fisuración.

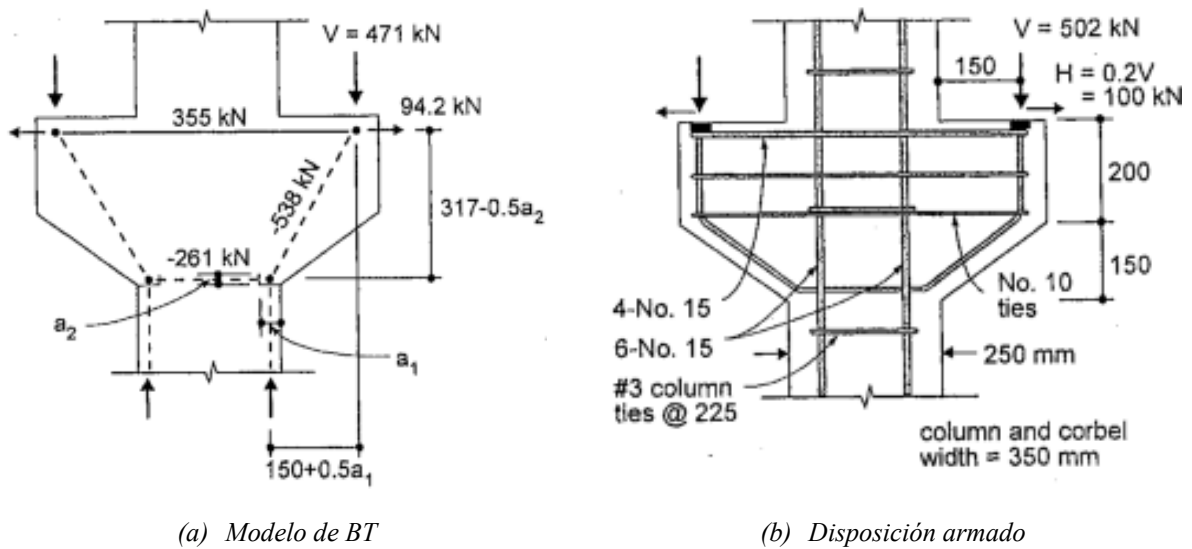


Figura II. 10: Modelo de BT para soporte con dos ménsulas cortas [3]

La figura inferior muestra una imagen de un soporte con dos ménsulas cortas tras su rotura en un ensayo experimental. Como se puede observar aparecen dos fisuras diagonales y otras dos verticales a la altura del soporte. Las primeras corresponden a las fisuras que aparecen por la difusión de las bielas inclinadas (razón por la que se dispone armadura horizontal secundaria) y las segundas son debidas a la tracción horizontal que debe ser resistida por el tirante horizontal del modelo de BT.

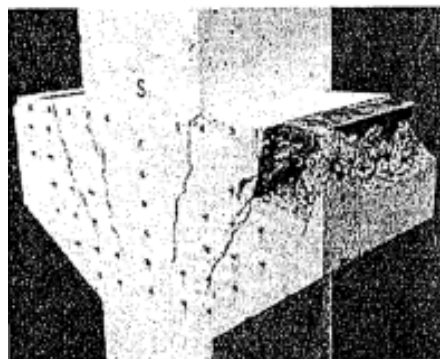


Figura II. 11: Soporte con dos ménsulas cortas tras rotura [3]

2.5.3.3 Viga de gran canto

Son aquellas vigas cuya relación entre la luz l y el canto total h es inferior a 2 en vigas simplemente apoyadas y 2.5 en vigas continuas. Sin considerar las posibles cargas puntuales que puedan estar aplicadas en la viga y que generen una discontinuidad, las vigas de gran canto son un ejemplo de discontinuidad generalizada. Incluso para situaciones de carga donde sólo esté sometida a peso propio no es aplicable la ley de deformaciones planas. Se pueden dimensionar mediante modelos de BT, cuya validez ha sido verificada experimentalmente. Como cualquier región D el grado de detalle del modelo va a tener influencia en la estructura interna resultante como se puede observar de las siguientes imágenes. En el modelo (b), más refinado, aparece un tirante horizontal en la mitad del canto que no aparece en el modelo (a). Se si dispone un armado como el modelo (a), aun siendo admisible, aparecerían fisuras verticales importantes por falta de armadura.

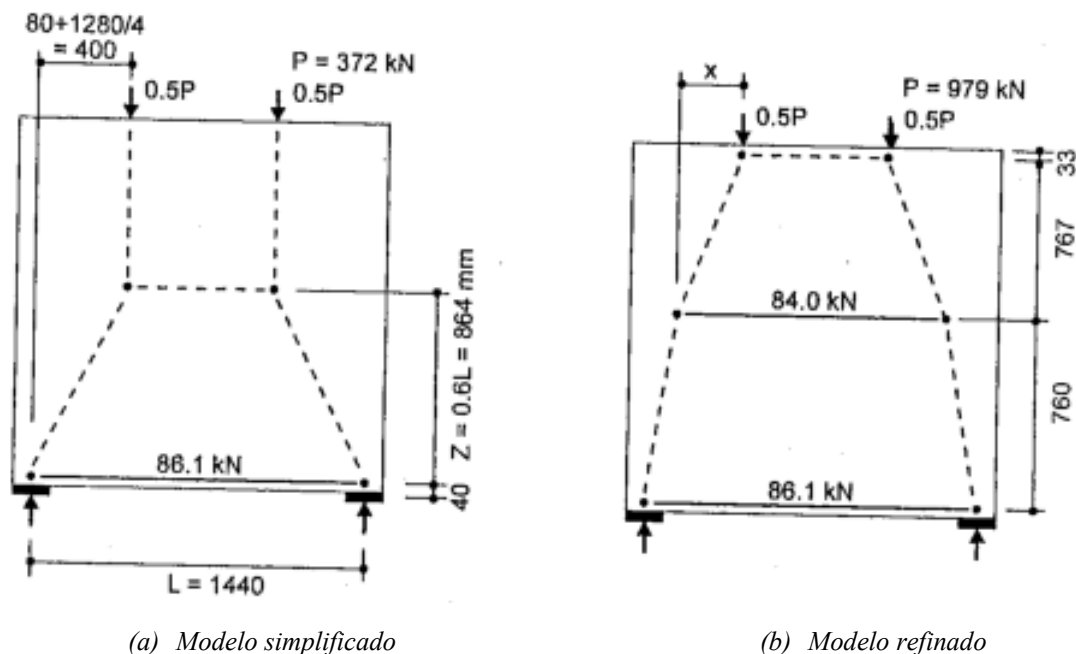


Figura II. 12: Modelo de BT para viga de gran canto [3]

2.5.3.4 Viga de gran canto con hueco

También se pueden aplicar modelos de BT para el proyecto de vigas de gran canto en las que puedan existir huecos (Figura II. 13).

2.5.3.1 Pantalla con hueco

Las pantallas con huecos también constituyen una discontinuidad generalizada debido a la existencia de los huecos. El modelo de BT aplicable variará en función de las cargas aplicadas y la localización de los apoyos. Como ejemplo se presenta un modelo que sería adecuado para una pantalla sometida a dos cargas verticales en su parte superior y dos apoyos en su parte inferior (Figura II. 14).

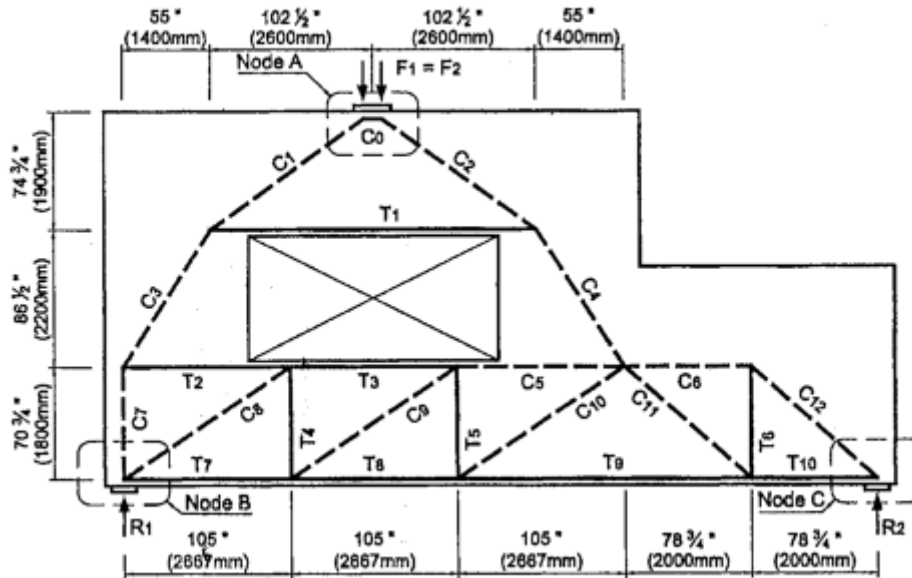


Figura II. 13: Modelo de BT para viga de gran canto con hueco [3]

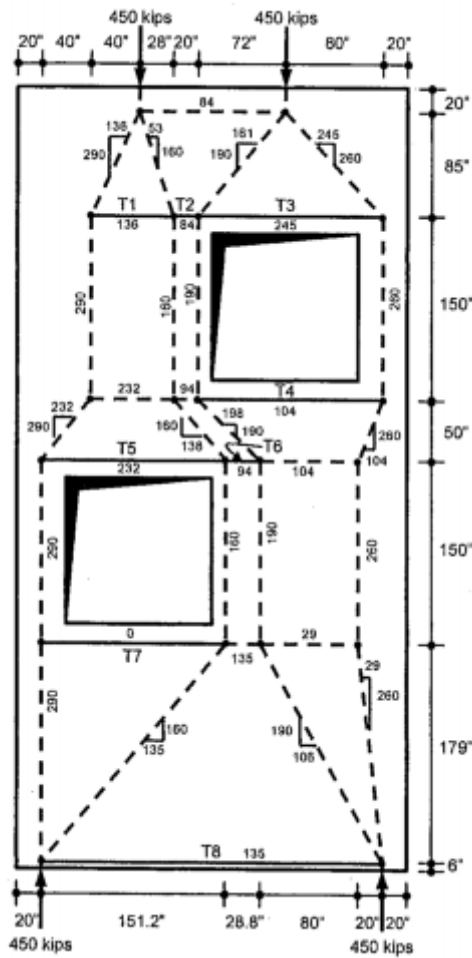


Figura II. 14: Modelo de BT para pantalla con huecos [3]

2.5.3.2 Apoyo a media madera

Los apoyos a media madera constituyen una región D que se utiliza tanto en edificación como en obra civil. Son frecuentes los problemas debidos a la fisuración y degradación del hormigón, por lo que resulta importante conocer como se comportan. La validez del MBT para apoyos de media madera ha sido verificada por numerosos autores (ACI SP-208 (2012) [3], Sola et al. (2011) [42]).

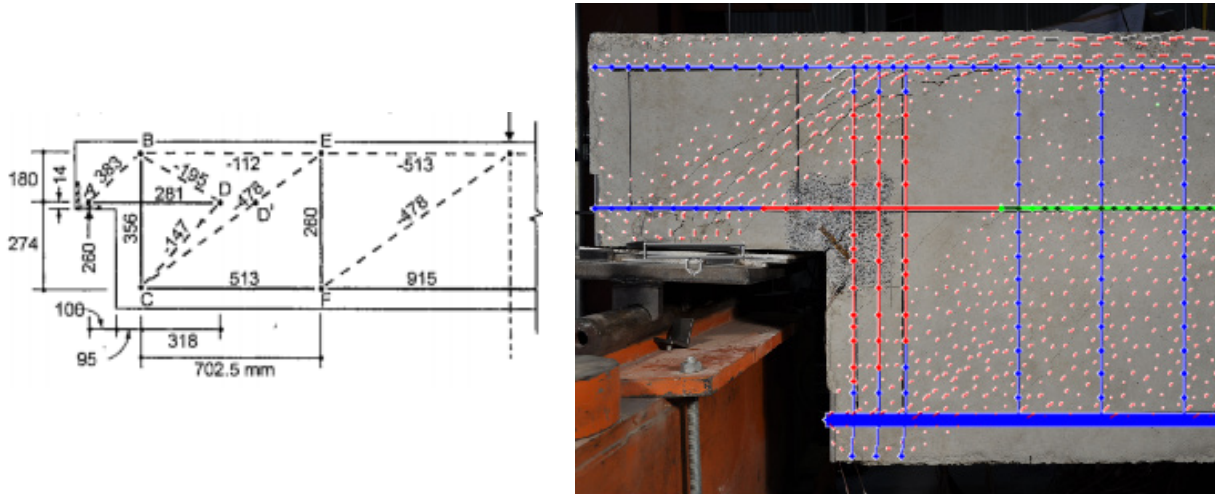


Figura II. 15: Modelo de BT para apoyo a media madera (izq. [3] y der. [42])

Existen otras configuraciones de armado alternativas para los apoyos a media madera como la que se presenta en la figura inferior. La capacidad de adaptación de los modelos de BT permite que se puedan aplicar para diferentes configuraciones de armado que pueda plantear el proyectista.

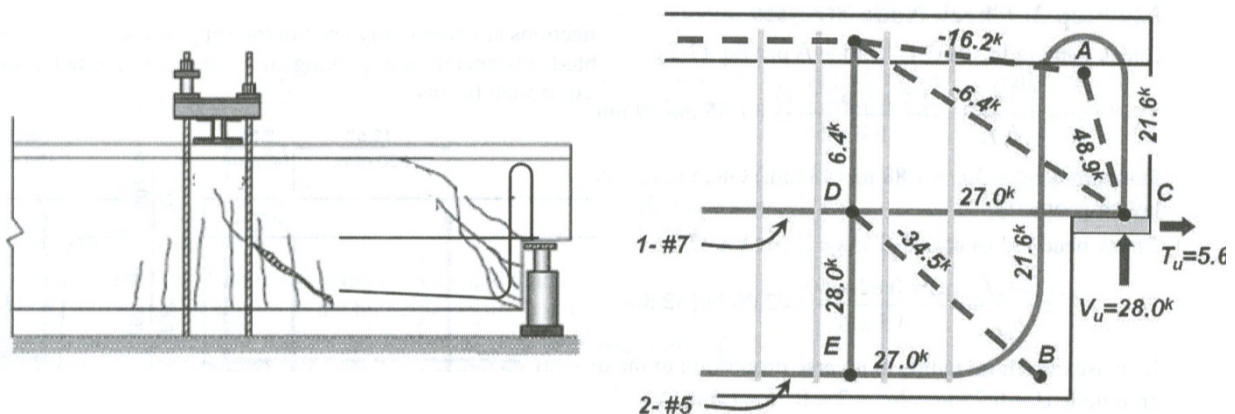


Figura II. 16: Modelo de BT para apoyo a media madera con disposición de armado alternativa (ACI SP-273 (2011) [4])

2.5.3.3 Diafragma

Debido a las grandes cargas que transmite los diafragmas para la conexión de los elementos segmentados también se consideran regiones de discontinuidad que pueden ser estudiados mediante el MBT. Normalmente se define una estructura interna que se encarga de transmitir las cargas de cortante y otra que se encarga de los esfuerzos de torsión. De la combinación de ambos modelos resulta el armado final del diafragma.

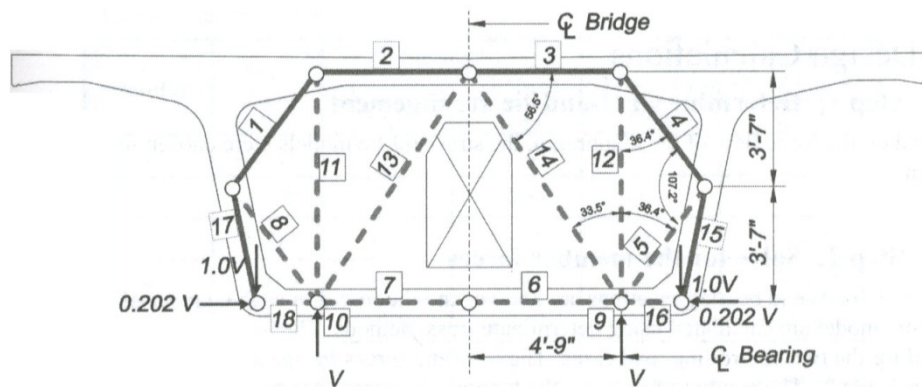


Figura II. 17: Modelo de BT para diafragma (cortante) [4]

2.6 Herramientas informáticas para el proyecto y análisis de regiones D bidimensionales

2.6.1 Introducción

A pesar de la amplia aceptación del MBT en los códigos de diseño y de la sencillez del concepto teórico, pueden existir ciertas dificultades para su aplicación debido principalmente a:

- (i) Selección de un modelo de BT adecuado:

Como ya se ha comentado anteriormente existen numerosas posibilidades, pero debido a la limitada capacidad de redistribución plástica de las estructuras de hormigón sólo algunas son viables. Es recomendable que el modelo de BT se adapte lo máximo posible a las trayectorias de tensiones obtenidas de un cálculo elástico lineal, admitiendo desviaciones de $\pm 15^\circ$. Existe un método que mide a través de un parámetro la aptitud de un determinado modelo de BT en función de cuánto se aleja de la solución elástica lineal (Ali et al. (2001) [7]).

- (ii) Adaptación iterativa de la geometría y las dimensiones de la estructura interna:

En muchas ocasiones es necesario modificar el modelo inicialmente propuesto debido al incumplimiento de alguno de los criterios de rotura o para explorar otras soluciones que puedan resultar más óptimas. Sin la ayuda de una herramienta informática el tiempo de cálculo necesario puede llegar a ser muy elevado.

(iii) Obtención de la geometría de nudos y tirantes:

Como ya se comentó en 2.5.1.3 existen diferentes opciones para la comprobación de nudos, que dependerá de su tipología. El proceso de comprobación de los nudos puede llegar a ser muy laborioso, más si se tiene que realizar varias veces hasta ajustar la solución.

(iv) Cálculo de modelos de bielas y tirantes estáticamente indeterminados: ver 2.4.4.1.

(v) Diferentes casos de carga y combinaciones de carga:

Para cada caso de carga se debe definir un modelo de BT. Además no es posible la obtención de la combinación de cargas directamente de la superposición de los casos de carga.

Para solventar estos problemas se han desarrollado herramientas informáticas que son aplicables al proyecto y análisis de regiones D bidimensionales. Entre éstas se encuentran las aplicaciones desarrolladas en Purdue University [10], Swiss Federal Institute of Technology (ETH Zürich)[8], Stuttgart Universität [38], University of Illinois at Urbana-Champaign [48], Kyungpook National University [51], Universidad Politécnica de Valencia [32] y Cornell University [7]. Algunas de estos programas se describen a continuación.

2.6.2 Rückert (1991) [38]

2.6.2.1 Introducción

De la Stuttgart Universität, bajo la supervisión de Schlaich y Schäfer, procede uno de los primeros programas para el análisis de regiones D bidimensionales. La representación gráfica no puede ser comparada con otros programas que se presentan a continuación debido a la diferencia de tiempo que los separa. El objetivo principal que se pretende conseguir implementando los modelos de BT en un programa de ordenador es ayudar al proyectista con una herramienta fácil de usar, con un entorno gráfico, que le permita definir, modificar, analizar y diseñar regiones D bidimensionales; y conseguir así aumentar la difusión del MBT. El paso de implementar el MBT en un ordenador necesita de algunas adaptaciones ya que inicialmente el método está pensado para aplicarse a mano.

2.6.2.2 Estructura del programa

Las tareas necesarias para el proyecto de regiones D por el MBT son: (i) diseño conceptual, (ii) idealización del modelo estructural, (iii) análisis del mismo, (iv) dimensionamiento de los elementos, (v) definición de los detalles y (vi) dibujo de planos. Previo al desarrollo del programa existían programas que podían realizar estas tareas, pero de manera aislada, pero no existía un programa que los integrara. Por tanto debía ser el propio usuario el que transfiriera los resultados de salida de un programa como datos de entrada del otro, teniendo incluso que adaptarlos según los requerimientos de cada uno. Con el programa que se describe en este apartado se pretende desarrollar un sistema integrado que agrupe en un solo programa todas estas tareas. Los módulos de los que está compuesto son:

- (i) Programa de diseño asistido por ordenador (CAD) donde el usuario pueda definir y modificar los modelos, y donde se representen los resultados de salida.
- (ii) Programa de elementos finitos para analizar la estructura.
- (iii) Programa para el dimensionamiento de los elementos según el MBT.

Todos ellos conectados por una base datos donde se almacenan los resultados de cada uno de los módulos. Para facilitar su manejo también se dispone de una interfaz gráfica interactiva y un programa de control.

2.6.2.3 Proceso de diseño

La principal aportación de este programa es que permite transformar automáticamente las trayectorias de tensiones obtenidas de un análisis lineal con elementos finitos en un modelo de BT. También permite que el usuario defina el modelo de BT previamente obtenido a mano o adaptado de casos comunes conocidos. Se proponen estructuras internas que sean mecanismos en equilibrio, ya que así se garantiza que existe una única geometría estable para la transmisión de cargas, ya que para estructuras internas estáticamente determinadas o indeterminadas su geometría puede ser casi cualquiera cumpliendo con el equilibrio, a pesar de que estén muy lejos de lo natural. Para solventar el problema que supone analizar un mecanismo se usa un programa de análisis no lineal geométrico, similar al que se pueda utilizar para el cálculo de estructuras de cables. Si el modelo propuesto es el obtenido directamente de las trayectorias de tensiones se tiene la ventaja de que el modelo ya está en una posición estable y representa el flujo de cargas.

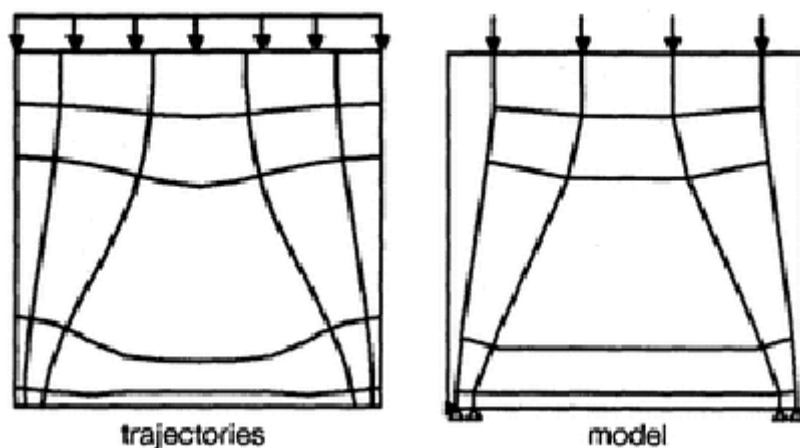


Figura II. 18: Modelo a partir de las trayectorias [38]

2.6.3 CAST–Computer-Aided Strut-and-Tie (Tjhin y Kuchma(2004)[48])

2.6.3.1 Introducción

Se trata de una herramienta informática de descarga gratuita y desarrollada desde 1998 en la University of Illinois, pensando tanto para su aplicación académica como profesional, haciendo el proceso de proyecto de regiones D mucho más eficiente y transparente, permitiendo también la posibilidad de explorar otras soluciones alternativas. Se dispone de una interfaz única donde se generan y modifican los posibles modelos de BT, se realiza el cálculo de las fuerzas que aparecen en los elementos, se selecciona el armado y se comprueba la capacidad resistente de bielas y nudos.

2.6.3.2 Estructura del programa

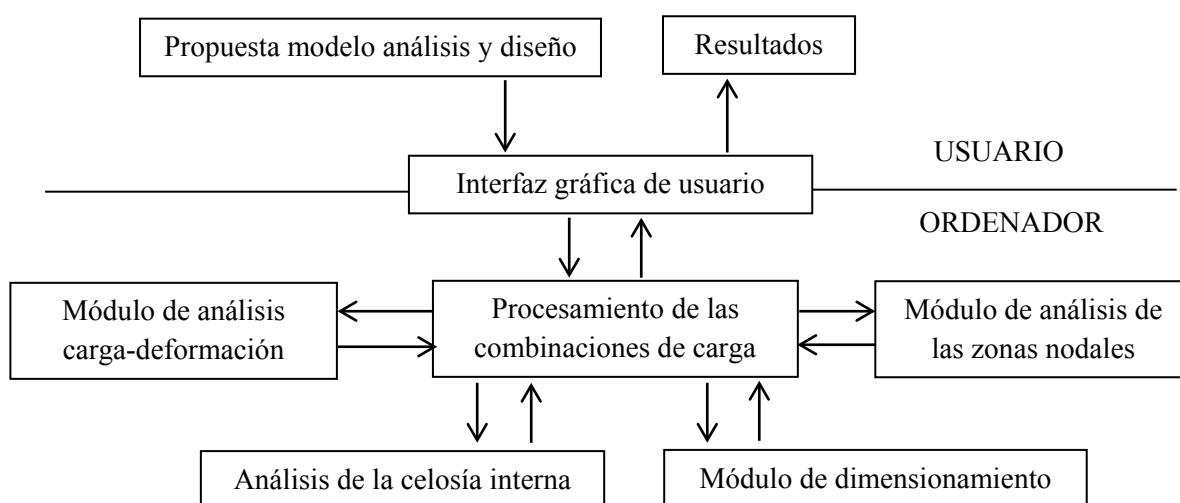


Figura II. 19: Representación esquemática de la estructura interna de CAST [48]

2.6.3.3 Tratamiento de las bielas, tirantes y zonas nodales

Los elementos disponibles para la definición del modelo son bielas de hormigón, tirantes de armadura y zonas nodales. Se considera una forma prismática para las bielas y se asume que la distribución de tensiones a lo largo del ancho de la biela es uniformemente distribuida. Por lo tanto, la tensión en cada biela se calcula directamente dividiendo la fuerza por el área de la biela, que es igual al producto del ancho por la dimensión de la pieza en la dirección perpendicular al plano de estudio.

$$f_c = \frac{F_c}{w_c t} \quad (2.9)$$

Los tirantes pueden estar constituidos por una o varias capas de armadura. Se considera que la armadura está embebida y uniformemente distribuida a lo largo de una zona prismática de hormigón. El propio tirante se considera con una forma ideal prismática y el cálculo de la tensión se realiza de manera similar a las bielas.

$$f_t = \frac{F_t}{w_t t} \quad (2.10)$$

La geometría de las zonas nodales queda definida directamente por la intersección de los anchos efectivos de las bielas y los tirantes y se discretizan en triángulos para estimar su estado tensional. La tensión en cada uno de estos triángulos es constante y el salto de tensión entre triángulos se produce en las líneas que los separan. Estas líneas de discontinuidad se introducen a partir de los vértices de la zona nodal para poder satisfacer la condición de equilibrio en las mismas.

El número de mínimo de triángulos n_t en el que se debe dividir una zona nodal para que se pueda alcanzar las condiciones de equilibrio depende del número de lados que define la zona nodal n_s . Si el número de lados es par se aplica la ecuación (2.11) y si es impar la ecuación (2.12). Así, para el ejemplo de la Figura II. 20, donde el número de lados de la zona nodal es cinco se deben disponer al menos cinco triángulos.

$$n_t = 2n_s - 4 \quad (2.11)$$

$$n_t = 2n_s - 5 \quad (2.12)$$

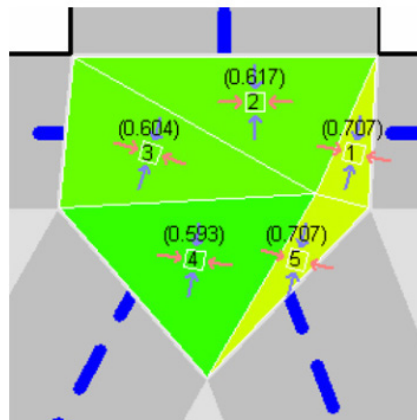


Figura II. 20: Ejemplo tratamiento de una zona nodal por descomposición en triángulos [48]

Para el cálculo de la fuerza que aparece en cada elemento, si la estructura interna propuesta es estáticamente determinada se obtienen directamente del equilibrio. Si el modelo de BT propuesto es estáticamente indeterminado existen dos opciones (i) considerar la rigidez de cada uno de los elementos para calcular la distribución de fuerzas o (ii) simplificar el modelo a la suma de estructuras estáticamente determinadas.

Una vez conocidas las fuerzas que aparecen en cada uno de los elementos de la estructura interna se debe proceder a su dimensionamiento. El dimensionamiento de las bielas es sencillo ya que se selecciona un ancho efectivo para cada biela tal que la capacidad resistente de la biela sea superior a la demandada. Se aplica un coeficiente reductor que varía entre 0 y 1 para tener en cuenta las diferentes circunstancias que se pueden dar en una biela y que afectan a su resistencia.

El proceso para el dimensionamiento de los tirantes es similar. Se dispone una o varias capas de armado para que la capacidad resistente del tirante sea superior a la demandada. El ancho efectivo de cada tirante se selecciona de manera que no se supere la tensión máxima en los extremos del tirante. Se deberá garantizar que:

$$f_u = \frac{A_s f_y}{w_t t} \geq f_t \quad (2.13)$$

Para comprobar las zonas nodales se verifica que en ninguno de los triángulos en los que ha quedado dividida la zona nodal se supera el criterio de fallo biaxial de tensiones. Para los nudos C-C-C se emplea el criterio de Mohr-Coulomb modificado, despreciando la posible contribución del acero. Para los nudos C-C-T, C-T-T y T-T-T, la contribución del hormigón se tiene en cuenta a través del criterio de Mohr-Coulomb y la del acero considerando un comportamiento elasto-plástico. Como el número de incógnitas es superior al número de ecuaciones para la resolución del sistema se emplea el método simplex.

2.6.3.4 Proceso de diseño

El proceso a seguir para el diseño y análisis de una región mediante el programa *CAST* es el siguiente:

- Se definen los límites de la región D, bien numéricamente, mediante el ratón o seleccionando una de las plantillas disponibles. En caso de que sea necesario modificar la geometría de la región se puede ajustar la posición de los nodos en cualquier instante del proceso de diseño. Las cargas aplicadas, las placas de carga, las propiedades de los materiales y las condiciones de apoyo se definen mediante la barra de herramientas.
- El usuario define la celosía interna para la transmisión de las cargas.
- Se procede al análisis de la misma y como resultados se obtienen las fuerzas que aparecen en cada uno de los elementos (Figura II. 21).
- El usuario selecciona y dispone el armado de refuerzo y el ancho de cada una de las bielas.
- Se evalúa la capacidad resistente de bielas y tirantes así como las tensiones que aparecen en las zonas nodales. Tras este primer análisis el usuario puede modificar las características de los nudos. Esta modificación provoca una variación de la geometría

de la estructura interna y de los propios nudos y, por tanto, de las tensiones en las zonas nodales. Una vez que el usuario considera que alcanzado un buen diseño puede proceder a su impresión.

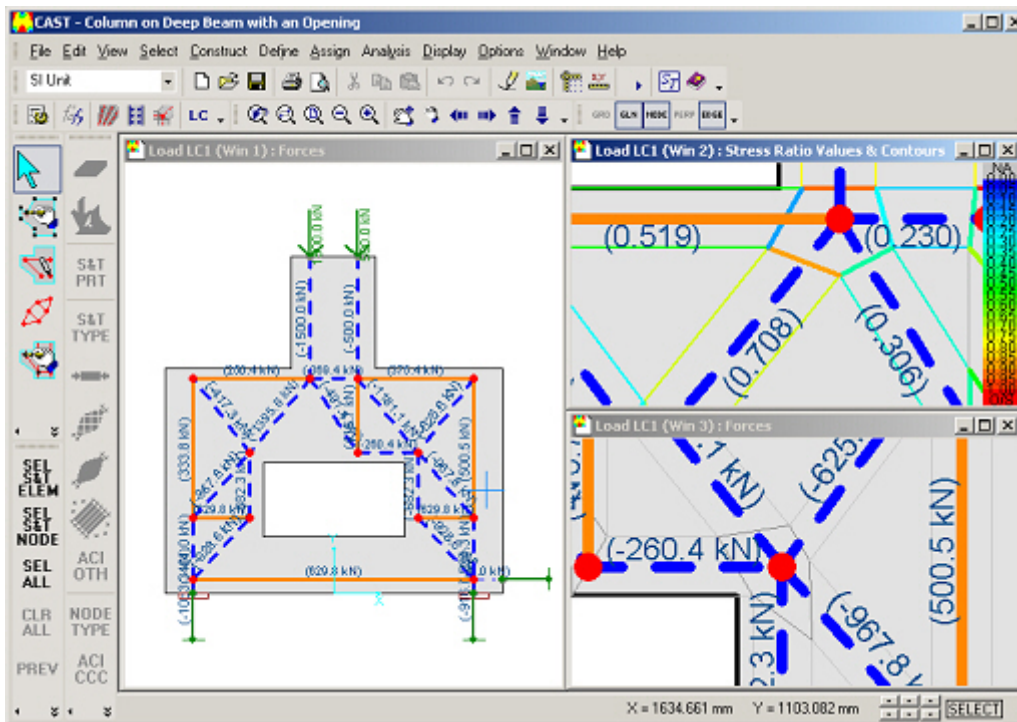


Figura II. 21: Salida de resultados tras el análisis de la celosía [48]

2.6.3.5 Evolución *CAST2FEA* (Park et al. (2010) [36])

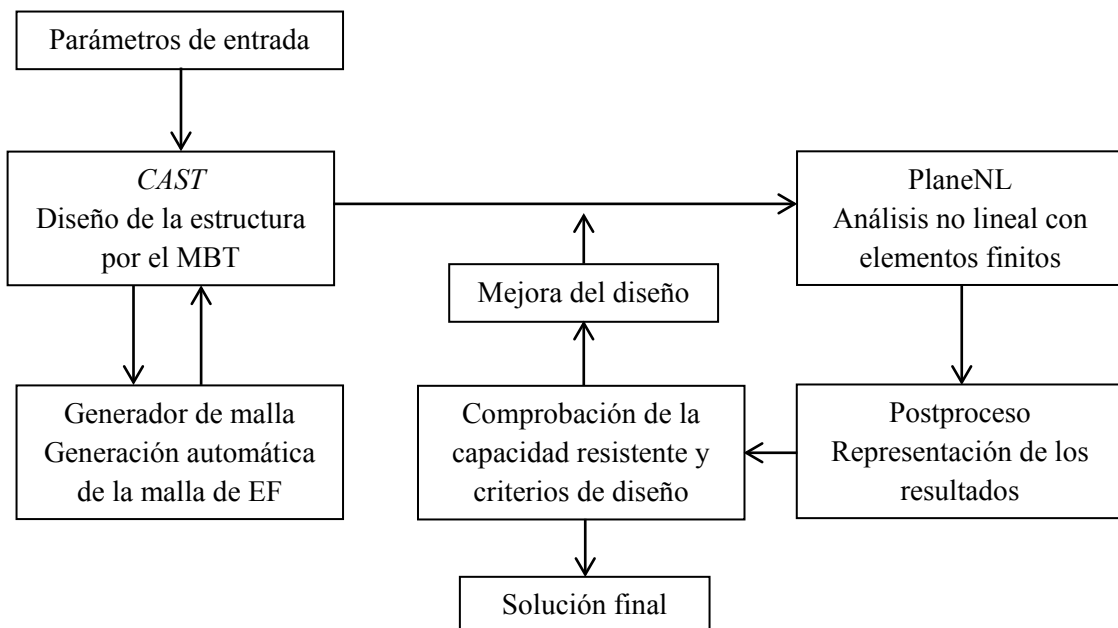


Figura II. 22: Representación esquemática de la estructura interna de *CAST2FEA* [36]

El *CAST2FEA* integra en una misma herramienta el programa *CAST* y un programa de análisis no lineal de elementos finitos llamado *PlaneNL*, que incluye el comportamiento del hormigón mediante el conocido modelo constitutivo *MCFT (Modified Compression Field Theory)* (Vecchio y Collins (1986) [50]). La idea principal reside en evaluar mediante un análisis no lineal de elementos finitos el modelo de BT definido en el *CAST*.

El *CAST2FEA* está compuesto de una serie de módulos para (i) la generación automática de los resultados de entrada para *PlaneNL* a partir de los resultados de *CAST*, (ii) la creación de una malla para el análisis de elementos finitos y (iii) un postproceso para la representación de los resultados. Permite evaluar el estado límite de servicio y el estado límite último.

2.6.4 Método de los Elementos Finitos Bielas y Tirantes *MEFBT* (Miguel et al. (2002) [32])

2.6.4.1 Introducción

El *MEFBT* (Método de los Elementos Finitos Bielas y Tirantes) [32] es un programa desarrollado por la Unidad Docente del Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil de la Universidad Politécnica de Valencia para el análisis y proyecto de regiones D bidimensionales. Esta herramienta está basada en el método de los elementos finitos y es capaz de configurar automáticamente un modelo de BT a partir de la configuración de armado propuesta por el proyectista, siendo capaz incluso de configurar estructuras hiperestáticas internas de bielas y tirantes.

2.6.4.2 Estructura del programa

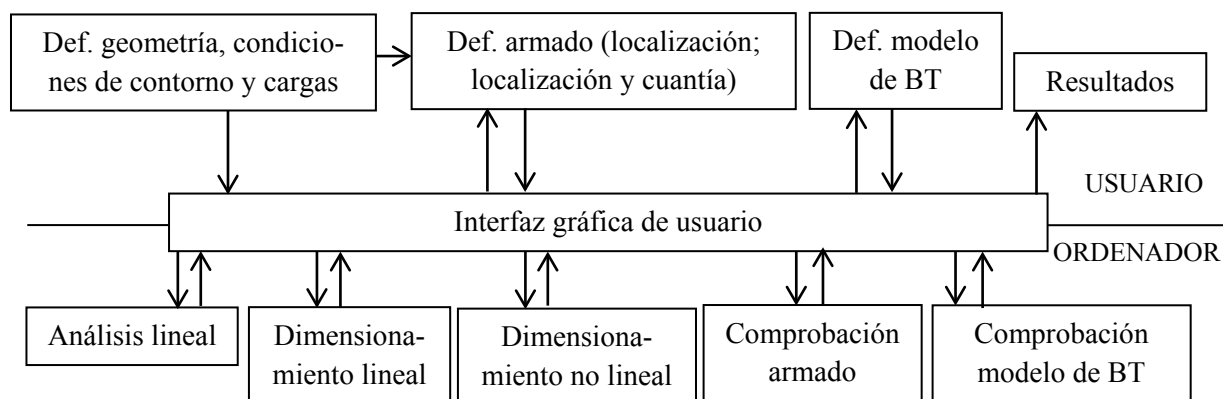


Figura II. 23: Representación esquemática de la estructura interna de *MEFBT*

2.6.4.3 Particularidades

(i) Modelización de las condiciones de contorno

Para evitar los problemas de convergencia que se pueden generar debido a las distorsiones que generan los apoyos puntuales, el programa permite definir apoyos tipo placa que se extienden a lo largo de una determinada longitud definida por el usuario. También las cargas aplicadas sobre la región pueden ser puntuales o distribuidas

(ii) Armadura

El programa permite la consideración de las armaduras a través de elementos finitos tipo barra, representando cada armadura bien por un único elemento o por varios tramos. También permite una representación difusa en la que el usuario define la orientación de la armadura y la cuantía.

(iii) Anclaje armaduras

Existe la posibilidad de comprobar o dimensionar el anclaje de las armaduras según la EHE, el eurocódigo EC-2 o la norma americana ACI. En caso de querer aprovechar esta opción el usuario debe definir el tipo de anclaje (prolongación recta, patilla o gancho en U, o barra transversal soldada), las condiciones de adherencia (buena o deficiente) y el recubrimiento de hormigón.

2.6.4.4 Proceso de diseño

El proceso a seguir para el diseño y análisis de una región con el *MEFBT* es el siguiente:

- El usuario debe comenzar por la definición de la geometría de la región D, bien mediante el ratón o introduciendo las coordenadas del contorno numéricamente. Paralelamente se puede definir la resistencia y los coeficientes de seguridad del hormigón y el acero y los coeficientes de eficiencia para la comprobación de bielas y zonas nodales.
- Tras haber definido la geometría se habilita la opción de mallado, mediante la cual el área definida se divide en elementos finitos triangulares automáticamente. Como resultado aparece en pantalla el número total de elementos finitos y nodos generados.
- Se definen las condiciones de contorno y las cargas aplicadas sobre la región.
- El usuario puede optar por realizar un análisis lineal para identificar los flujos de tensiones y disponer de acorde a ellos la armadura en las zonas donde aparezcan tracciones o directamente disponer la armadura.
- Si el usuario durante la definición del armado también ha fijado la cuantía el programa comprueba si se excede la capacidad resistente de la región o no.
- Si se ha definido la localización de las armaduras pero no su cuantía se procede al dimensionamiento de la armadura, bien considerando un comportamiento lineal en compresión del hormigón (dimensionamiento lineal) o considerando un comportamiento elasto-plástico (dimensionamiento no lineal). En caso de que alguna armadura no sea necesaria el programa la elimina.

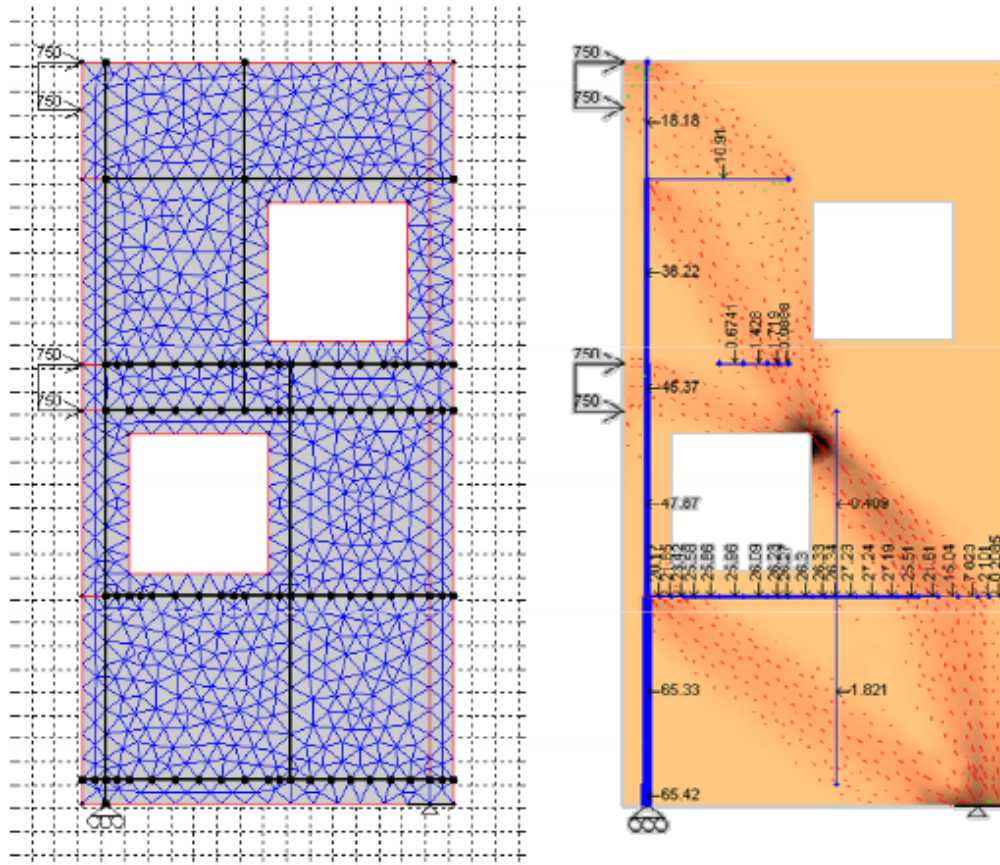


Figura II. 24: Análisis de una pantalla con huecos sometida a cargas laterales con el MEFBT
(Miguel y Fernández (2011) [34])

Tras el dimensionamiento o comprobación de la región se puede definir un modelo de BT mediante elementos tipo barra y comprobar la capacidad resistente de las bielas y de las zonas nodales. Durante el proceso de definición del modelo el programa va guiando al usuario para que finalmente se defina una estructura de barras estáticamente determinada. Sí que es posible definir configuraciones de armado que den lugar a estructuras hiperestáticas, pero no en el módulo de comprobación del modelo de BT.

2.7 Modelos de bielas y tirantes para regiones D tridimensionales

El estudio de regiones D tridimensionales se suele simplificar en la mayoría de las ocasiones al análisis de modelos bidimensionales debido a que no existen recomendaciones sobre cómo considerar la intersección entre bielas y tirantes ni una formulación específica para comprobar las zonas nodales. Sin embargo ya en 1987 Schlaich et al. [40] enunciaban que “si el estado tensional no es predominantemente plano, como en el caso del punzonamiento o cargas concentradas, se deberían utilizar modelos de bielas y tirantes tridimensionales”. De acuerdo con Reineck et al. (2011) [23] cuando la analogía 2D no es posible la formulación de un modelo espacial puede ser bastante compleja, así como encontrar geometrías congruentes para las zonas nodales 3D. Por consiguiente debe llevarse a cabo una mayor investigación sobre estos aspectos y definirse criterios adecuados de rotura para la resistencia de zonas nodales tridimensionales.

2.7.1 Capacidad resistente de las zonas nodales tridimensionales

2.7.1.1 Geometría de las zonas nodales

A pesar de la importancia de las zonas nodales, que en la práctica en muchas ocasiones da lugar a la rotura del elemento estructural, no existe casi información sobre cómo comprobar su capacidad resistente en modelos tridimensionales. Una de las dificultades que se presenta reside en cómo definir la geometría de la zona nodal, no existiendo muchas recomendaciones al respecto.

Chantelot y Mathern (2010) [13] proponen un método para definir una geometría nodal consistente. El método consiste en identificar las esquinas que forman la zona nodal a partir de conocer las dimensiones de las placas de apoyo y de la altura de la zona nodal. Proponen una geometría paralelepípeda para las zonas nodales, que tiene como ventaja que el centro de gravedad de un paralelepípedo resultado de la intersección de varias bielas coincide con la intersección de los ejes de las bielas hexagonales que la forman. Una vez definida la geometría de la zona nodal a partir de la geometría de las bielas conocidas, la geometría del resto de bielas se puede obtener por proyección del paralelepípedo que forma la zona nodal en la dirección del vector que define la biela. Darse cuenta que esta proyección genera una forma hexagonal, que se puede dividir en un paralelogramo y dos triángulos. El paralelogramo resulta de proyectar la cara diagonal del paralelepípedo y los dos triángulos de la mitad de las caras inferior y superior. El centro de gravedad del hexágono coincide con el del paralelogramo, que coincide a su vez con la proyección del centro de gravedad del paralelepípedo, por lo que se garantiza el equilibrio de momentos en el nudo.

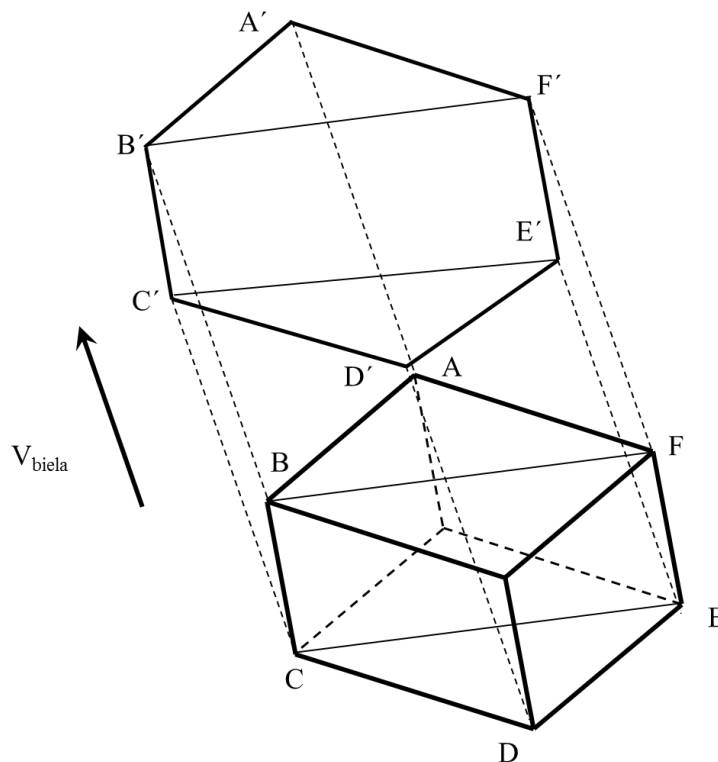


Figura II. 25: Biela hexagonal a partir de zona nodal paralelepípeda

El área de la biela depende de la geometría de la zona nodal y de la dirección de la biela. Según demuestran los autores el área de las bielas que se obtiene con este método es siempre mayor o igual que utilizando la analogía 2D por lo que la capacidad resistente estimada para las bielas es también mayor.

$$A' B' = |\overline{AB} - (\overline{AB} \cdot \vec{v})\vec{v}| \quad (2.14)$$

$$\text{Área(hexágono)} = f(A' B', B' C', C' D', D' E', E' F', F' A') \quad (2.15)$$

2.7.1.2 Resistencia del hormigón

Según resultados experimentales llevados a cabo en cubos sometidos a un estado triaxial de compresiones, la capacidad resistente del hormigón aumenta considerablemente con compresiones transversales (Figura II. 26). Este incremento puede llegar a ser de cinco veces la resistencia a compresión uniaxial si la tensión de compresión transversal es igual a la resistencia uniaxial del hormigón. Este aumento se puede tener en cuenta a la hora de comprobar zonas nodales que resulten de la intersección de varias bielas.

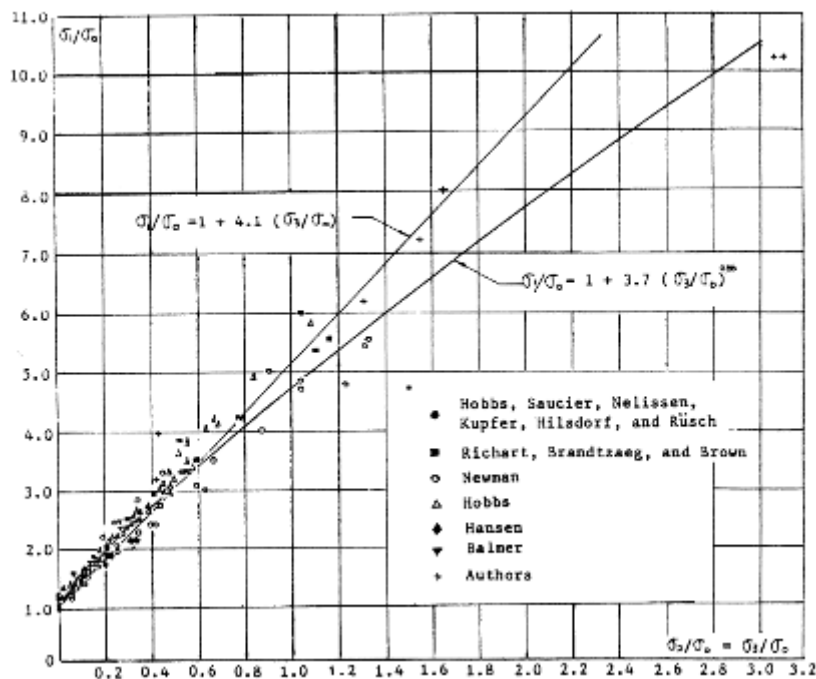


Figura II. 26: Resultados de ensayos triaxiales de compresión sobre probetas cúbicas de hormigón (Chuan-zhi et al. (1987) [14])

Algunas normas dan recomendaciones sobre cómo cuantificar este incremento de resistencia. El EC-2 [18] permite en los casos donde las tensiones transversales superen el valor de $0.75f_{ck}$ aumentar la resistencia de cálculo del hormigón hasta:

$$f_{cd4} = k_4 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} \quad (2.16)$$

donde k_4 es igual a 3.0.

2.7.2 Recomendaciones angulares

Las mismas limitaciones angulares para las regiones D bidimensionales comentadas en el apartado 2.5.2 son extensibles a las regiones tridimensionales, haciéndose referencia al ángulo real que forman las bielas y/o los tirantes en el espacio. Este ángulo se calcula según:

$$\theta = a \cos \frac{v_{biela} \cdot v_{tirante}}{|v_{biela}| \cdot |v_{tirante}|} \quad (2.17)$$

2.7.3 Elementos estructurales que constituyen regiones D tridimensionales

Como ejemplos de elementos estructurales que constituyen regiones D y cuyo comportamiento en rotura es marcadamente tridimensional pueden citarse los encepados de pilotes, las zapatas rígidas, los cálices de cimentación de soportes prefabricados y los diafragmas para la conexión de los elementos en puentes segmentados, entre otros.

La bibliografía existente respecto a regiones D tridimensionales se limita casi exclusivamente al estudio experimental de encepados de pilotes y a la comprobación de la aptitud del MBT para predecir los resultados experimentales. Las conclusiones y resultados obtenidos ponen de manifiesto que el empleo del MBT para el proyecto de encepado de pilotes es mucho más racional y da lugar a un diseño más eficiente que otros métodos.

2.7.3.1 Encepados de pilotes

2.7.3.1.1 Campañas experimentales

El método de diseño para encepados de pilotes que históricamente se ha usado es el dimensionamiento a nivel sección. Este método se divide en dos pasos: (i) dimensionamiento a cortante, donde se calcula el canto mínimo del encepado para que la resistencia a cortante del hormigón sea superior al cortante actuante y (ii) dimensionamiento a flexión, donde se calcula el armado longitudinal necesario al igual que se haría para un viga de hormigón armado sometida a flexión, asumiendo una ley plana de deformaciones. Sin embargo, como bien han concluido numerosos autores tras la realización de campañas experimentales, este método de dimensionamiento no resulta adecuado e incluso puede llegar a quedar del lado de la inseguridad.

Como alternativa se propone la aplicación del MBT. El hecho de que el MBT tenga en cuenta el flujo de fuerzas dentro de la estructura y no sólo las fuerzas que aparecen en algunas zonas lo hace mucho más fiable a la hora de predecir el comportamiento de los encepados de pilotes y, por tanto poder dimensionarlos.

El estudio experimental de los encepados de pilotes es anterior al nacimiento del MBT debido a los problemas frecuentes que ha acarreado su uso. Entre 1955 y 1958 Blevot y Fremy [12] ensayaron alrededor de 100 encepados, aunque la mayoría reducidos a escala 1:2 y 1:3 para

estudiar la influencia de la configuración de armado (armadura en bandas, en cruz o distribuida). De estos ensayos se concluyó que concentrar el armado sobre los pilotes (tal y como se deriva de la aplicación del MBT) supone un incremento de la capacidad resistente para los encepados de 4 pilares del 20% comparado con una distribución uniforme, que era la distribución recomendada por la norma de construcción ACI.

Clarke (1973) [15] tras ensayar 15 encepados de 4 pilotes llegó a conclusiones similares a las obtenidas por Blevot y Fremy, aunque el incremento de la capacidad resistente lo reducía al 14%. También observó que cuando se disponía la armadura sobre los pilotes el anclaje de la misma se veía favorecido por el efecto de confinamiento causado por la biela inclinada.

Sabnis y Gogate (1984) [39], tras ensayar 9 encepados de cuatro pilotes a escala 1:5 variando la cantidad de armado, concluyeron que el ACI Building Code, basado en un diseño seccional, debía ser revisado porque no captaba el comportamiento real de los encepados, especialmente de los de gran canto.

Ya tras la aparición del MBT, Adebar et al. (1990) [5], realizaron la primera campaña experimental para verificar la aptitud del MBT para encepados. En total ensayaron 6 encepados, 4 de ellos en forma de diamante con diferentes disposiciones de armado, un encepado rectangular con armaduras en banda y otro encepado en cruz.

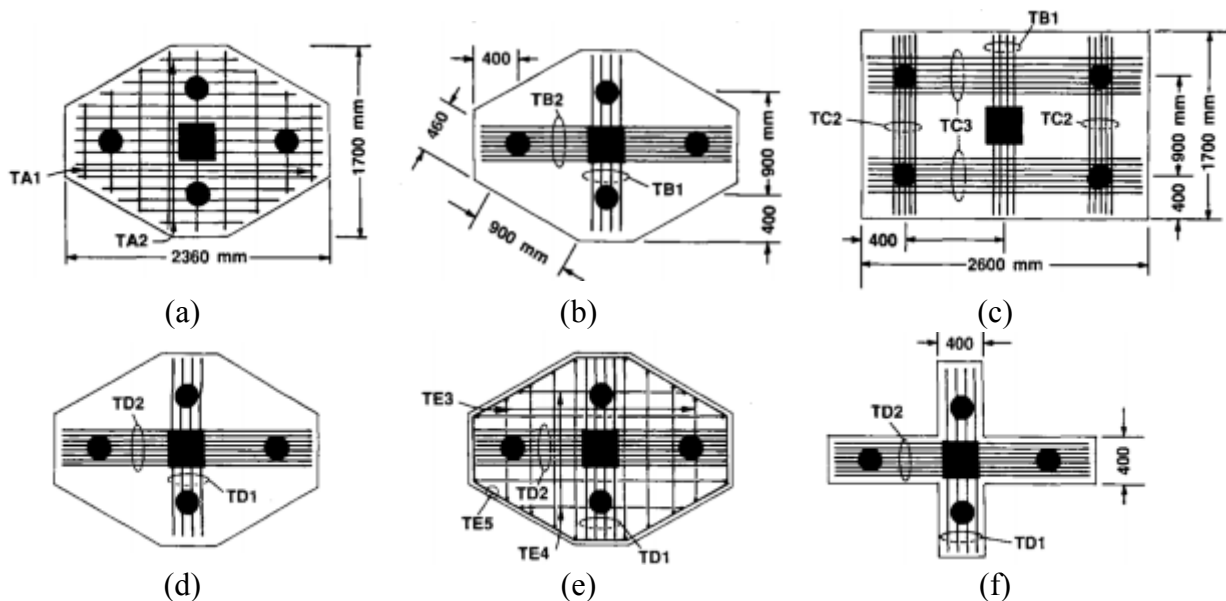


Figura II. 27: Planta encepados ensayados por Adebar et al. (1990) [5]

De los ensayos obtuvieron varias conclusiones. Por un lado observaron que suponer una distribución plana de tensiones está muy lejos de la realidad y que las cargas de rotura que estimaba el código ACI 318-83 estaban en muchas ocasiones del lado de la inseguridad, debido principalmente a la sobrevaloración de la importancia del canto efectivo en la resistencia, despreciando la importancia del armado longitudinal. También, la norma ACI predecía incorrectamente la resistencia del encepado (f) comparado con el (d), suponiendo que la ausencia de hormigón en las esquinas supone una disminución importante de la capacidad resistente. Pero en realidad, y según asume el MBT, esta parte no tiene influencia.

En cuanto a la rotura de los encepados, no se produjo por aplastamiento del hormigón si no por la aparición de una fisura de *splitting* longitudinal a la biela. A pesar de haberse alcanzado la plastificación de las armaduras en la rotura, la ductilidad era escasa.

Más tarde Adebar y Zhou (1996) [6] propusieron limitar la tensión de las bielas en las zonas nodales para que las armaduras alcancen la plastificación y evitar que se produzca la fisura de *splitting* de las bielas.

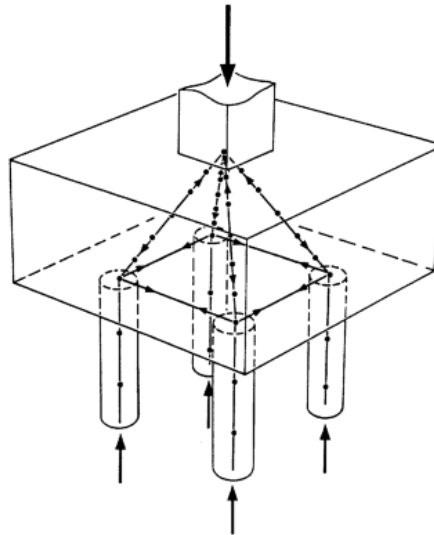


Figura II. 28: Modelo de BT tridimensional para un encepado de cuatro pilotes (Adebar y Zhou (1996) [6])

Suzuki et al. (2000) [45] ensayaron 34 encepados con el objetivo de evaluar la influencia de la distancia de los pilotes al borde del encepado. En muchos de los ensayos la rotura se produjo por cortante antes de plastificar la armadura horizontal, aun cuando estaban dimensionados para romper por flexión según el MBT. Esto se debía a la escasa longitud disponible para el anclaje de la armadura.

Más recientemente Gu et al (2009) [24] estudiaron el comportamiento de 4 encepados de cuatro pilotes con diferentes configuraciones de armado: distribuida, en bandas perimetrales, en aspa y una combinación de las dos anteriores. Concluyeron que la configuración de armado en aspa es la de mayor resistencia y la configuración en bandas entre pilotes adyacentes la de mayor ductilidad sin pérdida de capacidad resistente importante.

2.7.3.1.2 Modelos de bielas y tirantes para encepados

El modelo de BT para una carga centrada es sencillo y ha sido estudiado experimentalmente como se ha comentado. Para los casos en los que pueda aparecer flexión los modelos recomendados ya no son tan sencillos, además de que no han sido comprobados experimentalmente.

En la siguiente ilustración se plantean dos modelos de bielas y tirantes que se proponen en la bibliografía (ACI SP-273 (2011) [4]) para el caso en el que el momento sea tal que genere tracciones en dos de los pilotes. En una de las configuraciones toda la armadura es ortogonal (a) y en la otra se dispone armado inclinado (b).

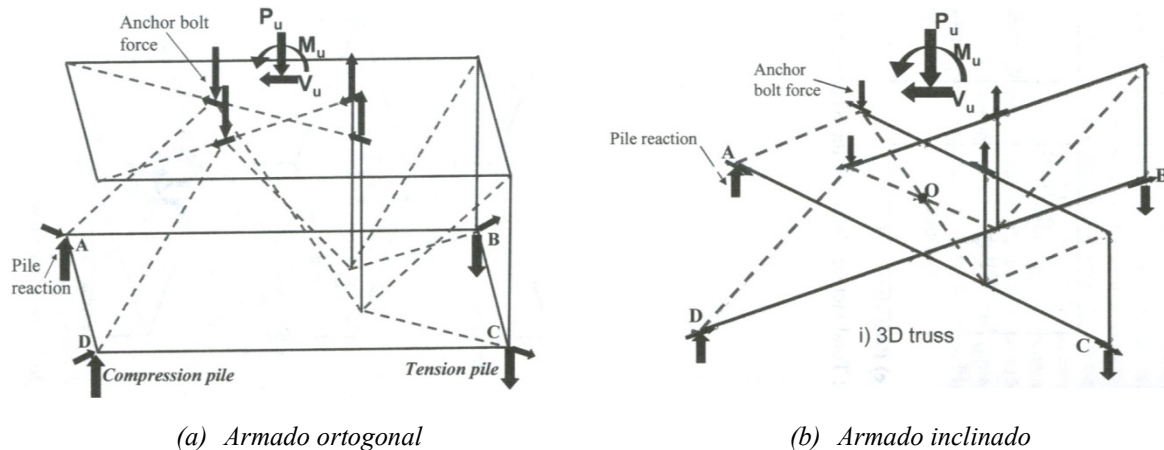


Figura II. 29: Modelo de BT para encepado con pilote en tracción [4]

2.8 Herramientas informáticas para el proyecto y análisis de regiones D tridimensionales

No existen en la actualidad herramientas informáticas para el estudio de regiones D tridimensionales. Sí que se han realizado estudios numéricos de regiones D tridimensionales, pero estos están limitados a la proposición de un modelo de BT tridimensional y al análisis del mismo mediante un programa de elementos finitos de barras (Chantelot y Mathern (2010) [13]). También existen algunos modelos teóricos de elementos finitos que generan automáticamente el modelo de BT aplicando técnicas de optimización topológica. Un ejemplo de estos últimos se comenta a continuación.

2.8.1 Leu et al. (2006) [27]

Aunque no se puede considerar como un programa específico para el proyecto de regiones D tridimensionales, Leu et al. (2006) proponen una metodología para facilitar la definición de modelos de BT tridimensionales a partir de una optimización topológica. Inicialmente se parte de un modelo de elementos finitos sometido a unas cargas determinadas y con unas condiciones de contorno, asumiendo un comportamiento elástico lineal del material. A partir de esta configuración inicial se procede a eliminar aquellos elementos que menos energía de deformación acumulan, que de algún modo es un indicador de que apenas colaboran en la capacidad resistente de la estructura. Este proceso se repite eliminando en cada iteración un número máximo de elementos, hasta que se encuentra una estructura con una nueva topología más óptima que la inicial. Esta nueva configuración en la que únicamente permanece el material estrictamente necesario es la que define el modelo de BT tridimensional. En la Figura II. 30 se muestra un ejemplo de la optimización topológica para una viga bidimensional.

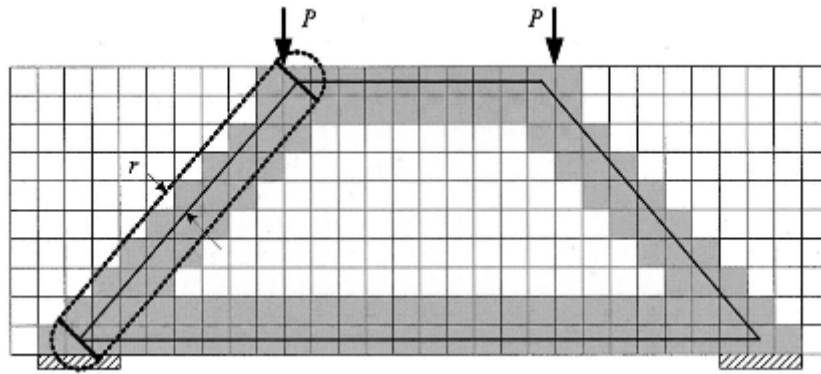


Figura II. 30: Optimización topológica bidimensional aplicada a una viga a flexión [27]

Según los autores esta metodología permite incluso resolver problemas estáticamente indeterminados. Para calcular la rigidez relativa de cada uno de las bielas se considera la contribución de los elementos finitos existentes en su entorno. Se suman los volúmenes de todos los elementos finitos que hayan permanecido tras la optimización topológica y se encuentren dentro del radio de influencia de la directriz de la biela. Por lo tanto, se debe definir un radio de influencia alrededor de la directriz de cada biela (r en la Figura II. 31), lo que en un espacio tridimensional genera un cilindro y dos semiesferas en los extremos. Finalmente el área de esa biela se calcula dividiendo la suma de los volúmenes de los elementos finitos entre la longitud de la biela. Evidentemente el radio de influencia elegido influirá en los resultados (Figura II. 31) y además ese radio no tiene por qué ser el mismo para cada todos los elementos del modelo de BT. Pese a ello los autores consideran que se puede establecer un rango de radios válidos para cada elemento en particular para los que la los resultados finales apenas varían. Por ejemplo, para el elemento considerado en la Figura II. 31 el rango de radios 13-20cm sería aceptable.

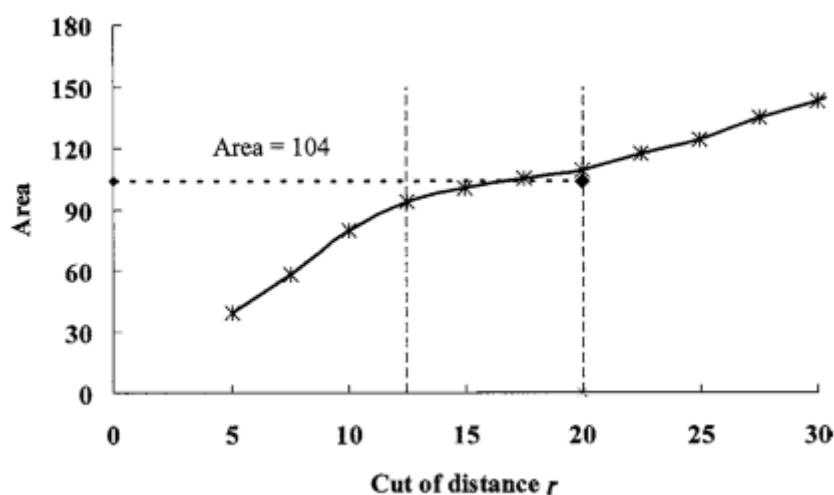


Figura II. 31: Área efectiva vs. radio de influencia para una biela de compresión (ud.cm)[27]

3 Objetivos específicos y alcance

3.1 Objetivos específicos

Los objetivos específicos de la investigación son:

- Revisión y análisis del estado del conocimiento sobre el MBT:

A pesar de la relativa juventud del MBT, se han realizado grandes avances y el uso del mismo está bastante extendido para regiones D bidimensionales. Sin embargo, este conocimiento bastante exhaustivo sobre los modelos de BT bidimensionales no es extensivo a las tres dimensiones en el estado actual del conocimiento. No existen, por ejemplo reglas precisas sobre la manera de tratar las zonas nodales en 3D.

Existen herramientas informáticas (*MEFBT* [32], *CAST* [48]) que se pueden aplicar para el análisis de regiones D bidimensionales. La extrapolación de las hipótesis realizadas en el campo bidimensional al campo tridimensional puede ser la vía de abordar el problema.

Por otra parte, ha habido algunos autores que han tratado la modelización de regiones D tridimensionales con el MBT a través de técnicas de optimización topológica (Leu et al. (2006) [27], Liang et al. (2002) [28]).

- Desarrollo de un modelo teórico para la simulación del comportamiento de estructuras de hormigón armado tridimensionales, que sea capaz de generar automáticamente el campo tensional dada la configuración de armado proporcionada por el proyectista, a partir del cual se pueda definir el modelo de BT.

Dado que el hormigón es un material cuya característica principal es su baja resistencia a tracción en comparación con su resistencia a compresión en un buen número de aplicaciones ingenieriles se puede despreciar la resistencia a la tracción, como es el caso de los MBT. Por tanto, resulta necesario desarrollar un modelo numérico tridimensional para la modelización de estructuras de hormigón armado que tenga en cuenta la posible fisuración del mismo en una, dos o tres direcciones.

El desarrollo del modelo teórico implica la implementación del algoritmo de resolución en un lenguaje de programación computacional que permita aplicar las técnicas numéricas propias de la ingeniería estructural.

El marcado comportamiento no lineal de las estructuras de hormigón armado exige un elevado coste computacional para tratar en cada escalón de carga del proceso iterativo, tanto las ecuaciones de compatibilidad como de equilibrio. A pesar de que los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales representan una ayuda para garantizar que finalmente se alcance una solución de equilibrio, es frecuente que se den problemas de convergencia. Por tanto, resulta imprescindible la implementación de métodos que garanticen la convergencia del proceso.

En este trabajo, se plantea la extrapolación al campo tridimensional de la metodología planteada en el programa *MEFBT* (Método de Elementos Finitos Aplicado al Método de Bielas y Tirantes) desarrollado en la unidad docente de Hormigón del Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil de la Universidad Politécnica de Valencia.

Finalmente, se plantea la validación de las hipótesis adoptadas en el modelo numérico y su posterior implementación, a través de los resultados experimentales obtenidos de la literatura científica sobre elementos estructurales con marcado carácter tridimensional.

3.2 Alcance

La investigación planteada en este trabajo se enmarca en una línea de investigación que implica tanto la modelización numérica como experimental de elementos estructurales de hormigón armado con un marcado comportamiento tridimensional y en los que no es válida la aplicación de la hipótesis de Navier.

El trabajo presentado en este documento pretende abordar la extensión al campo tridimensional del algoritmo base implementado para 2D en el *MEFBT*. Dicho algoritmo consiste en proporcionar el campo de tensiones de compresión en el hormigón dada una armadura.

Como mejoras al cuerpo del algoritmo presentado en este documento, se pueden plantear: dimensionamiento de la armadura, estudio de zonas nodales tridimensionales, comprobaciones sobre bielas o la modelización de la adherencia hormigón-armadura, etc...

4 Descripción del modelo numérico propuesto

4.1 Planteamiento general del método de los elementos finitos

4.1.1 Introducción

En la resolución de problemas complejos que aparecen en la vida real a menudo se recurre a subdividirlos en problemas más sencillos que puedan ser resueltos más fácilmente y después a partir de las soluciones de estos subsistemas obtener la respuesta del problema original. Este procedimiento se sigue no sólo en ingeniería, si no también en otras áreas científicas y es la idea fundamental del método de los elementos finitos.

El método de los elementos finitos es un método aproximado de resolución de problemas continuos. El medio continuo se discretiza en un número finito de elementos, cuyo comportamiento queda definido por un número finito de parámetros asociado a ciertos puntos característicos denominados nodos. El sistema completo se forma por ensamblaje de los elementos finitos y la solución se obtiene siguiendo las reglas de los problemas discretos. Las incógnitas del problema pasan a ser los valores que toman ciertas funciones (en el caso de estructuras los desplazamientos) en los nodos, en lugar de tener que obtener una función válida para todos los puntos de la estructura. Posteriormente el valor de la función en el resto de puntos se obtiene por interpolación de los valores conocidos en los nodos mediante funciones de interpolación, también conocidas como funciones de forma.

Aparece pues frente al medio continuo la idea de discretización. La discretización siempre supone una aproximación a la realidad excepto si la discretización se realiza indefinidamente. En este último caso el resultado final sería el propio medio continuo, pero el problema sólo se podría resolver mediante ecuaciones diferenciales. Aprovechando la capacidad de los ordenadores para resolver problemas discretos, el ingeniero debe encontrar una discretización tal que le permita aproximarse a la solución real del problema continuo sin tener que recurrir a la solución analítica que será muy compleja y en algunas ocasiones incluso inabordable.

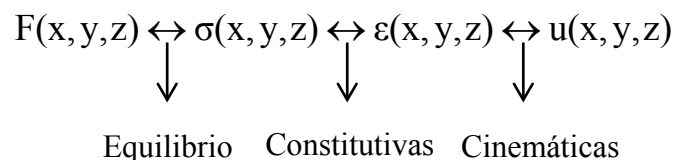
La precisión de los resultados obtenidos mediante el método de los elementos finitos depende de: (i) el número de elementos finitos en el que se ha discretizado el medio continuo y su distribución (malla empleada), (ii) la definición de las condiciones de contorno, (iii) el método de resolución del sistema de ecuaciones (especialmente cuando el comportamiento del material es no lineal como en el hormigón), y (iv) las ecuaciones constitutivas empleadas para caracterizar el comportamiento de los materiales.

En el campo de las estructuras de hormigón armado y pretensado, el uso del método de los elementos finitos está muy extendido y proporciona resultados que se aproximan muy bien al comportamiento real experimentado. Permite considerar fenómenos como la fisuración (tanto de manera continua como discreta), la adherencia entre acero y hormigón, el fenómeno de *tension-stiffening*, etc.

4.1.2 Formulación del método de los elementos finitos

4.1.2.1 Principios básicos del análisis estructural

La resolución de un problema estructural consiste en conocer la respuesta que tendrá una estructura con unas determinadas características (dependiente de su geometría, materiales y condiciones de contorno) frente a unas cargas determinadas $\mathbf{F}(x,y,z)$. La respuesta de la estructura quedará caracterizada por el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(x,y,z)$, las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z)$ y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}(x,y,z)$. El problema reside en establecer cómo se relacionan estos cuatro campos. Las ecuaciones de equilibrio, constitutivas y cinemáticas sirven de enlace según el siguiente esquema:



4.1.2.2 Elementos finitos, nodos y funciones de forma

En el análisis estructural la incógnita principal es el campo de desplazamientos, ya que a partir de él se pueden calcular el resto de incógnitas. De manera general, para una estructura continua el campo de desplazamientos podría expresarse según:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{C}(x, y, z)\mathbf{A} \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{u}(x,y,z)$ representa el campo de desplazamientos en el medio continuo, \mathbf{A} es un vector que agrupa los desplazamientos del medio continuo conocidos y $\mathbf{C}(x,y,z)$ una matriz de interpolación formada a partir de unos polinomios predefinidos. El problema pasa a ser la obtención del vector \mathbf{A} y la matriz $\mathbf{C}(x,y,z)$, a partir de los cuales se pueden obtener el resto de desplazamientos.

Según se ha comentado anteriormente, en el método de los elementos se discretiza el medio continuo en partes más pequeñas. De igual manera que se aplica (4.1) para la estructura completa se puede aplicar para un elemento finito de los que la forma resultando en:

$$\mathbf{u}_e(x, y, z) = \mathbf{C}_e(x, y, z)\mathbf{A}_e \quad (4.2)$$

donde el subíndice e hace referencia al elemento finito. Dentro de cada elemento finito los polinomios que definen $\mathbf{C}_e(x,y,z)$ serán los mismos, por lo que se aplicará la misma interpolación. A los puntos cuyos desplazamientos definen el vector \mathbf{A}_e a partir de los cuales se calcular el resto se les denomina nodos. Dicho de otra manera, se denominan nodos a los puntos del elemento finito en función de cuyos desplazamientos se expresan los desplazamientos de cualquier punto del elemento finito. Si se expresa ahora (4.2) según lo comentado en este párrafo resulta:

$$\mathbf{u}_e(x, y, z) = \mathbf{N}_e(x, y, z)\mathbf{r}_e \quad (4.3)$$

donde \mathbf{r}_e es el vector de desplazamientos nodales (serán las incógnitas a calcular) y $\mathbf{N}_e(x,y,z)$ las funciones de forma del elemento finito para interpolar los desplazamientos en el resto de puntos. Las dimensiones de ambos dependerán del espacio del problema y del número de nodos del elemento finito. Para el tetraedro lineal que se trata posteriormente el vector \mathbf{r}_e tiene 12 filas (cuatro nodos por tres grados de libertad en cada nodo) y la matriz \mathbf{N}_e 3 filas (tres grados de libertad por punto en el espacio) y 12 columnas.

Según (4.3), para un determinado punto de coordenadas (x_j, y_j, z_j) su vector desplazamiento se calcula como:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{u}_e(x_j, y_j, z_j) = \sum_i \mathbf{N}_i(x_j, y_j, z_j)\mathbf{r}_i \quad (4.4)$$

4.1.2.3 Propiedades de las funciones de forma

Existen varias propiedades importantes de las funciones de forma que se comentan en este apartado. En primer lugar, y partiendo de (4.4) es evidente que si el punto (x_j, y_j, z_j) seleccionado corresponde con un nodo del elemento finito, el vector desplazamientos \mathbf{r}_j será igual al desplazamiento \mathbf{r}_i del nodo ya conocido. Para que esto se cumpla las funciones de forma deben estar definidas de manera que:

$$\begin{aligned} N_i(x_j, y_j, z_j) &= 1 \rightarrow \text{si } i = j \\ N_i(x_j, y_j, z_j) &= 0 \rightarrow \text{si } i \neq j \end{aligned} \quad (4.5)$$

Además, aplicando un movimiento de sólido rígido \mathbf{a} sobre el elemento finito provocará que todos los puntos del elemento se desplacen lo mismo, incluido los nodos:

$$\mathbf{a} = \sum_i N_i(x, y, z) \mathbf{a} \quad (4.6)$$

Para que esto se cumpla es necesario que la suma de las funciones de forma en un punto determinado del elemento finito sea igual a la unidad:

$$\sum_i N_i(x, y, z) = 1 \quad (4.7)$$

lo que es coherente también con (4.5).

4.1.2.4 Ecuaciones cinemáticas

Según lo visto anteriormente las ecuaciones cinemáticas son las que relacionan las deformaciones y los desplazamientos. Esta relación se establece de la siguiente manera:

$$\varepsilon_i = \sum_j L_{ij} u_j = \sum_j L_{ij} \left[\sum_k N_{jk} r_k \right] = \sum_k \left[\sum_j L_{ij} N_{jk} \right] r_k = \sum_k B_{ik} r_k \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{r}_e \quad (4.9)$$

A la matriz que relaciona los desplazamientos de los nodos \mathbf{r}_e con las deformaciones del elemento finito en un punto cualquiera dentro del elemento se le conoce como matriz \mathbf{B}_e o matriz de desplazamientos. En el apartado 4.3.3 se describe cómo se obtiene esta matriz para el caso del tetraedro de cuatro nodos. Para ese caso el número de filas de la matriz es igual a 6 (existen seis deformaciones en el espacio) y el número de columnas 12 (cuatro nodos por tres grados de libertad de cada nodo).

4.1.2.5 Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas relacionan deformaciones y tensiones. Esta relación puede ser lineal o no lineal. Para el hormigón y el acero será no lineal ya que su rigidez depende del estado de deformación al que están sometidos.

$$\text{Comportamiento lineal} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (4.10)$$

$$\text{Comportamiento no lineal} \rightarrow \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.11)$$

4.1.2.6 Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen aplicando el principio de los trabajos virtuales según el cual el trabajo de las fuerzas exteriores aplicadas sobre una estructura debe ser igual al trabajo de las fuerzas internas que aparecen debido a la deformación que experimenta la estructura:

$$\sum_e \left[\int_{V_e} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{p}_e dV + \int_{S_e} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{t}_e dS + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{P}_e \right] = \sum_e \int_{V_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e dV \quad (4.12)$$

El término a la izquierda de la igualdad representa el trabajo realizado por las fuerzas externas, que pueden ser fuerzas por unidad de volumen \mathbf{p}_e , fuerzas por unidad de superficie \mathbf{t}_e o fuerzas puntuales \mathbf{P}_e , que se integran en sus respectivos dominios. El otro término representa el trabajo realizado por las fuerzas internas debido a la deformación que experimenta la estructura por las cargas externas aplicadas. Este trabajo se obtiene como suma del trabajo realizado en todos los elementos finitos que componen la estructura. El trabajo interno de cada elemento finito se calcula al integrar en el volumen del elemento finito el producto de las deformaciones y las tensiones. El símbolo δ hace referencia a que el desplazamiento impuesto es virtual.

Según (4.4) y (4.9) se puede escribir:

$$\delta \mathbf{u}_e^T = \delta \mathbf{r}_e^T \mathbf{N}^T \quad (4.13)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_e^T = \delta \mathbf{r}_e^T \mathbf{B}_e^T \quad (4.14)$$

Y sustituyendo (4.13) y (4.14) en (4.12) se tiene que:

$$\sum_e \delta \mathbf{r}_e^T \left[\int_{V_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{p}_e dV + \int_{S_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{t}_e dS + \mathbf{N}_e^T \mathbf{P}_e \right] = \sum_e \delta \mathbf{r}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e dV \quad (4.15)$$

Cada elemento finito tiene su propio sistema de referencia local. Sin embargo es necesario que a la hora de considerar su contribución a la respuesta global de la estructura se tome como referencia un sistema de coordenadas global común para todos los elementos finitos. El cambio de coordenadas locales a globales se realiza mediante la matriz de cambio de ejes \mathbf{T}_e . Aplicando esta matriz de cambio de base a los desplazamientos:

$$\mathbf{r}_{Ge} = \mathbf{T}_e \mathbf{r}_e \quad (4.16)$$

donde el subíndice G hace referencia a que está referido al sistema de coordenadas global. Sustituyendo (4.16) en(4.15):

$$\sum_e \delta \mathbf{r}_{Ge}^T \mathbf{T}_e \mathbf{F}_e = \sum_e \delta \mathbf{r}_{Ge}^T \mathbf{T}_e \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e dV \quad (4.17)$$

De la misma manera se realiza un cambio de ejes de las fuerzas exteriores aplicadas en el elemento finito:

$$\mathbf{F}_{Ge} = \mathbf{T}_e \mathbf{F}_e \quad (4.18)$$

y sustituyendo en (4.17):

$$\sum_e \delta \mathbf{r}_{Ge}^T \mathbf{F}_{Ge} = \sum_e \delta \mathbf{r}_{Ge}^T \mathbf{T}_e \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e dV \quad (4.19)$$

Como los desplazamientos de los grados de libertad que sean comunes a varios elementos finitos deben ser los mismos se puede escribir:

$$(\delta \mathbf{r}_{Gi})_{e1} = (\delta \mathbf{r}_{Gi})_{e2} = \dots = (\delta \mathbf{r}_{Gi})_{em} = \delta \mathbf{r}_{Gi} \quad (4.20)$$

$$\sum_i \delta \mathbf{r}_{Gi} \left(\sum_e F_{Gei} \right) = \sum_i \delta \mathbf{r}_{Gi} \left[\sum_e \sum_j T_{ej} \int_{V_e} B_{ej}^T \boldsymbol{\sigma}_e dV \right] \quad (4.21)$$

donde el término $\sum_i \delta \mathbf{r}_{Gi}$ puede simplificarse resultando en:

$$\sum_e F_{Gei} = \sum_e \sum_j T_{ej} \int_{V_e} \mathbf{B}_{ej}^T \boldsymbol{\sigma}_e dV \quad (4.22)$$

El primer término representa las fuerzas nodales externas equivalentes y el segundo las fuerzas nodales internas:

$$\mathbf{fne} = \sum_e F_{Gei} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{fni} = \sum_e \sum_j T_{ej} \int_{V_e} \mathbf{B}_{ej}^T \boldsymbol{\sigma}_e dV \quad (4.24)$$

4.1.2.7 Formulación para elasticidad lineal

Considerando un comportamiento elástico lineal del material, el vector de tensiones de (4.24) puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\sigma}_{e0} + \mathbf{D}_e (\boldsymbol{\varepsilon}_e - \boldsymbol{\varepsilon}_{e0}) = \boldsymbol{\sigma}_{e0} + \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e \mathbf{r}_e - \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_{e0} \quad (4.25)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_{e0}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_{e0}$ representan las tensiones internas antes de aplicar la carga y las deformaciones no mecánicas (retracción), respectivamente. Sustituyendo (4.25) en (4.22) se tiene:

$$\sum_e F_{Gei} = \sum_e \sum_j T_{ej} \int_{V_e} \mathbf{B}_{ej}^T (\boldsymbol{\sigma}_{e0} + \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e \mathbf{r}_e - \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_{e0}) dV \quad (4.26)$$

y desarrollando el producto:

$$\sum_e F_{Gei} = \sum_e \sum_j T_{ej} \int_{V_e} \mathbf{B}_{ej}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_{Ge} dV + \sum_e \sum_j T_{ej} \int_{V_e} \mathbf{B}_{ej}^T (\boldsymbol{\sigma}_{e0} - \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_{e0}) dV \quad (4.27)$$

$$\sum_e F_{Gei} = \sum_e \sum_j T_{ej} \int_{V_e} \mathbf{B}_{ej}^T \mathbf{D}_e \left(\sum_l \mathbf{B}_{el} \left(\sum_k T_{elk}^T r_{Gek} \right) \right) dV + \sum_e F_{Geoi} \quad (4.28)$$

Teniendo en cuenta (4.20) se tiene que:

$$\sum_e F_{Gei} = \sum_k \sum_e \left(\sum_j \sum_l T_{ej} \left(\int_{V_e} \mathbf{B}_{ej}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_{el} dV \right) T_{elk}^T \right) r_{Gk} + \sum_e F_{Geoi} \quad (4.29)$$

Obviando los términos T_{ej} y T_{elk} cuya función es realizar el cambio de ejes de locales a globales, en (4.29) se puede identificar que el término $\int_{V_e} \mathbf{B}_{ej}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_{el} dV$ está multiplicando al

desplazamiento r_{Gk} dando lugar a una fuerza. En física a la razón entre la fuerza aplicada y el desplazamiento obtenido debido a esa fuerza se le conoce como rigidez y se le identifica por la letra K . Sustituyendo este término:

$$\sum_e F_{Geoi} = \sum_k \sum_e \left(\sum_j \sum_l T_{ej} K_{jl} T_{elk}^T \right) r_{Gk} + \sum_e F_{Geoi} \quad (4.30)$$

$$\sum_e F_{Geoi} = \sum_k \sum_e \mathbf{K}_{Ge} r_{Gk} + \sum_e F_{Geoi} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{r} + \mathbf{F}_0 \quad (4.32)$$

donde \mathbf{F} es el vector de fuerzas nodales externas, \mathbf{K} la matriz de rigidez de la estructura, \mathbf{r} el vector desplazamiento de los nodos y \mathbf{F}_0 el vector de fuerzas debido a tensiones internas previas a la aplicación de la carga y/o deformaciones no mecánicas.

4.2 Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales

Puede ocurrir que para los desplazamientos nodales \mathbf{r} calculados, las fuerzas nodales internas no igualen a las fuerzas nodales externas. En ese caso se define una función residuo que se obtiene como diferencia de los dos vectores de fuerza:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_{ne} - \mathbf{f}_{ni}(\mathbf{r}) \quad (4.33)$$

El residuo aparece cuando el comportamiento de la estructura es no lineal debido al material y/o la geometría. Existen diferentes estrategias de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Habitualmente se emplean métodos iterativos con el objetivo final de obtener un vector de desplazamiento \mathbf{r} tal que haga nulo o minimice lo máximo posible el residuo. Se distinguen dos grandes grupos de métodos, en función de si el nivel de carga es constante o no durante el proceso de convergencia.

- (i) Métodos con nivel de carga constante: son aquellos en los que las fuerzas externas aplicadas sobre la estructura no varían durante el proceso de convergencia. Dentro de este grupo se encuentran el método de iteración directa, el método incremental, el método de Newton-Raphson, el método de Newton-Raphson modificado y el método de Cuasi-Newton.
- (ii) Métodos con nivel de carga variable o métodos de control de respuesta: son aquellos en los que la magnitud de las fuerzas externas aplicadas no es constante. Pertenecen a este grupo el método de control por arco (arc-length), el método de Chrisfield, el método de camino plano y el método de control de respuesta con desplazamiento impuesto.

En el presente trabajo fin de máster se ha empleado el método de Newton-Raphson que se describe a continuación. Además se ha incorporado una estrategia denominada método globalmente convergente para garantizar la convergencia.

4.2.1 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un método con nivel de carga constante. El método está basado en el empleo de la matriz tangente para la búsqueda de la solución de equilibrio que anule la función residuo definida como:

$$\psi_i = F_i - \sum_e \mathbf{T}_{ei} \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.34)$$

Derivando (4.34) y suponiendo que \mathbf{B}_e no depende de \mathbf{r}_e la matriz tangente se calcula según:

$$\begin{aligned}
 d\psi_i &= -\sum_e \mathbf{T}_{ei} \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r}_e dV = -\sum_e \mathbf{T}_{ei} \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_e d\mathbf{r}_e dV = \\
 &= -\sum_e \mathbf{T}_{ei} \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_e \mathbf{T}_{ej}^T d\mathbf{r}_e dV = -\sum_j \left[\sum_e \mathbf{T}_{ei} \left(\int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_e dV \right) \mathbf{T}_{ej}^T \right] d\mathbf{r}_{Gj} = \quad (4.35) \\
 &= -\sum_j \left[\sum_e \mathbf{T}_{ei} \mathbf{K}_{Te} \mathbf{T}_{ej}^T \right] d\mathbf{r}_{Gj} = -\sum_j K_{Tij} d\mathbf{r}_{Gj}
 \end{aligned}$$

donde la única variación respecto de (4.29) es que se debe emplear la matriz constitutiva tangente \mathbf{D}_T a partir de la ley constitutiva que relaciona $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$. Si \mathbf{B}_e depende de \mathbf{r}_e la matriz \mathbf{K}_T tiene más términos que corresponden a la no linealidad geométrica. Sin embargo, para el MBT no se considera la no linealidad geométrica.

Partiendo de una configuración con unos desplazamientos \mathbf{r}_i y con un residuo ψ_i y teniendo en cuenta que el objetivo es alcanzar un residuo nulo, el incremento de desplazamientos necesario es:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}_i) = \mathbf{0} - \psi(\mathbf{r}_i) = -\mathbf{K}_T(\mathbf{r}_i)\Delta\mathbf{r}_{i+1} \quad (4.36)$$

Y el nuevo desplazamiento se obtiene según:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_{i+1} \quad (4.37)$$

Este proceso debe repetirse hasta encontrar un vector desplazamientos \mathbf{r}_{sol} tal que anulen el residuo. Gráficamente la resolución del problema se indica en la siguiente figura.

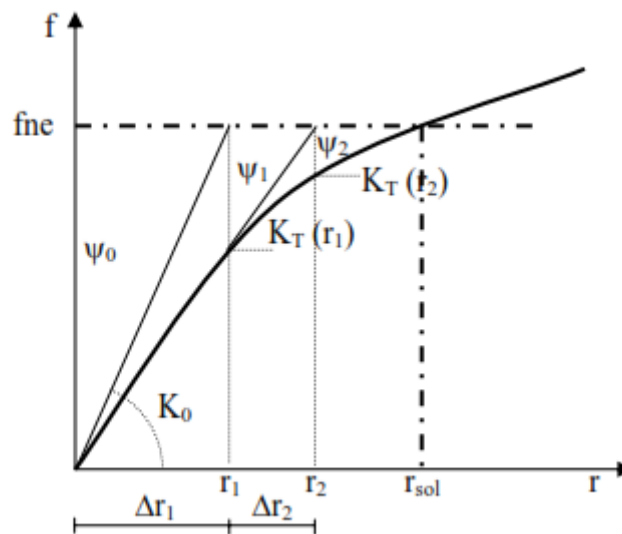
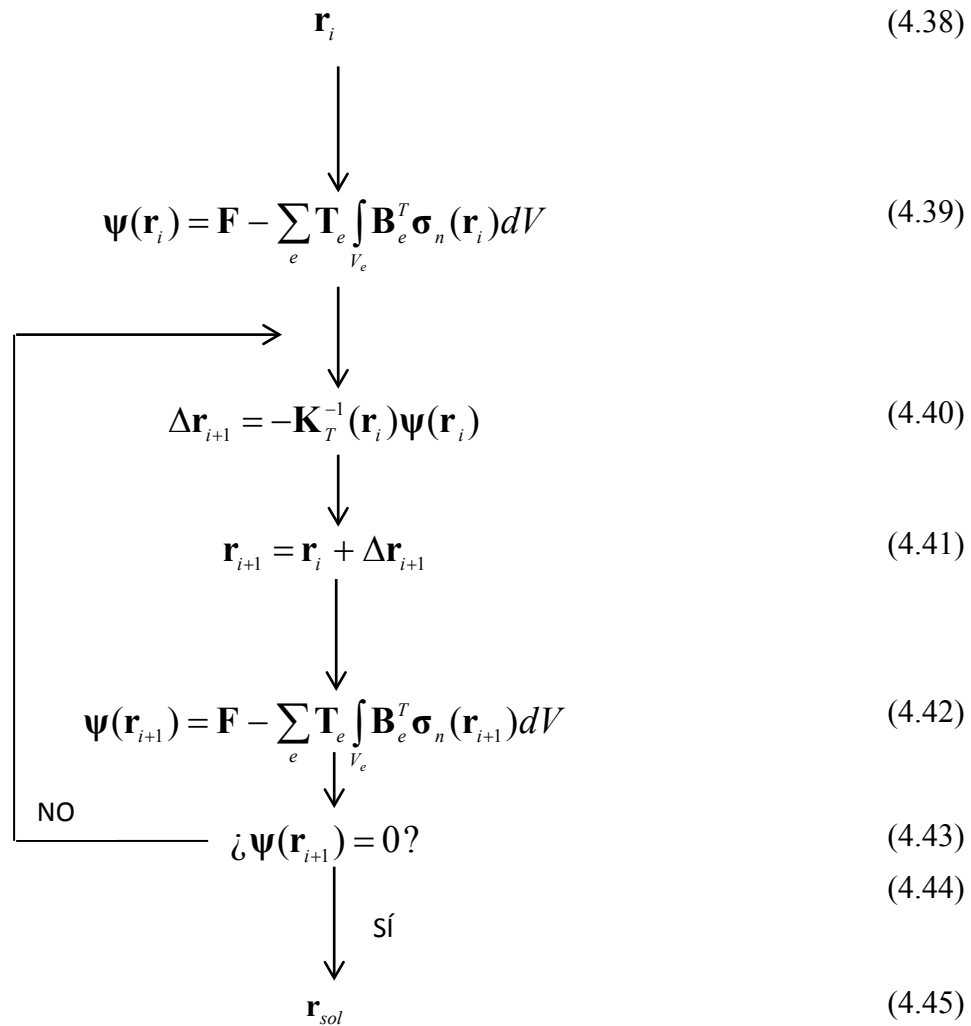


Figura IV. 1: Método de Newton-Raphson para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales (Delgado (2008) [17])

Y de forma esquemática se resume como sigue:



4.2.2 Métodos globalmente convergentes

4.2.2.1 Planteamiento del problema de convergencia

Es frecuente que en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales no se alcance una solución de equilibrio aplicando los métodos anteriormente mencionados. Hay que tener en cuenta las limitaciones de los mismos, sobre todo cuando el comportamiento del material es marcadamente no lineal como ocurre en las estructuras de hormigón.

Particularizando para el método de Newton-Raphson el lector debe darse cuenta que partiendo de una solución \mathbf{r}_i no equilibrada, el método busca una nueva solución a partir de la rigidez tangente que tiene en ese momento. Si la variación de la rigidez de la estructura en el tramo entre \mathbf{r}_i y $\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_{i+1}$ no es muy acusada el método de Newton-Raphson proporcionará una nueva solución en la que el residuo habrá disminuido considerablemente. Sin embargo si se produce una pérdida de rigidez importante en ese tramo, puede llegar a darse el caso de que el residuo para la nueva solución $\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_{i+1}$ sea incluso mayor que el residuo de la solución

anterior r_i . Estos estados no obstante pueden ser necesarios para llegar a la solución final, pero frecuentemente pueden impedir que se llegue a una solución de equilibrio. De una manera simplificada se representa este problema gráficamente en la figura inferior. Se puede observar que aplicando el método de Newton-Raphson para la curva de comportamiento roja, cuya derivada no varía demasiado a lo largo de Δr_{i+1} se logra reducir el residuo considerablemente de la iteración i a la $i+1$. No ocurre lo mismo para la curva azul, donde el residuo aumenta. Para problemas unidimensionales no parece un grave problema ya que tarde o temprano acabará convergiendo. Sin embargo en sistemas complejos de muchos grados de libertad este problema puede llegar a producir una variación de residuos sin rumbo fijo y no llegar a converger nunca a una solución equilibrada.

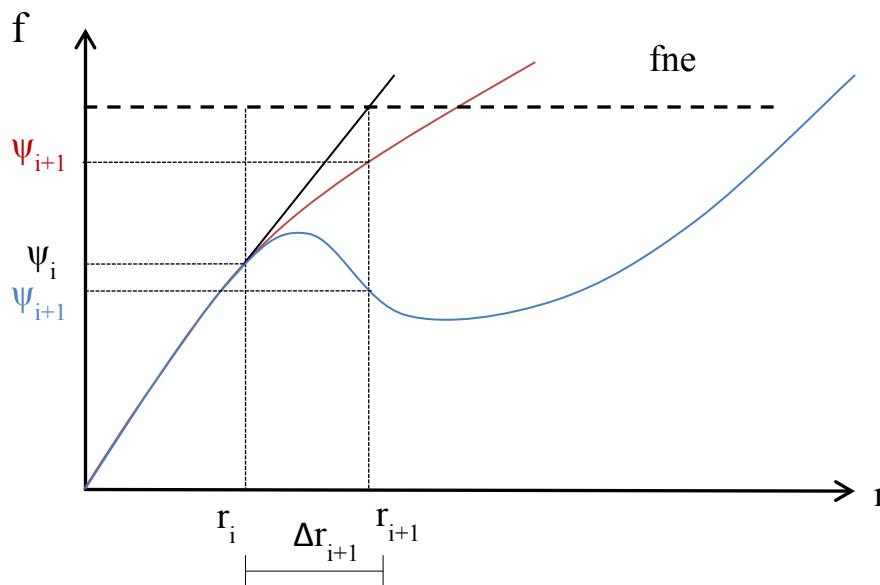


Figura IV. 2: Residuos obtenidos aplicando el método Newton-Raphson aplicado a dos estructuras con diferente comportamiento

En estructuras de hormigón, donde sobre todo la fisuración pero también la plastificación de las armaduras provocan una pérdida muy importante de la rigidez van a aparecer este tipo de problemas. Por lo tanto, resulta necesario implementar un método adicional que solucione los problemas numéricos de convergencia. En el modelo numérico aquí presentado se ha implementado un método globalmente convergente. La implementación del mismo fue fundamental para garantizar la convergencia del modelo numérico.

4.2.2.2 Planteamiento del método globalmente convergente

Un método globalmente convergente es aquel que utiliza una estrategia de convergencia global de manera que en cada iteración se consigue reducir el residuo respecto de la iteración anterior. Dicho de otra manera, en las sucesivas soluciones que se van obteniendo a lo largo del proceso iterativo que supone un método de convergencia como el Newton-Raphson el método globalmente convergente garantiza que en cada iteración la solución obtenida es al menos mejor que la anterior.

El principio fundamental del método globalmente convergente consiste en modificar a la baja mediante un factor λ el incremento de desplazamientos calculado según el método de método de convergencia hasta conseguir una reducción del residuo entre dos iteraciones.

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \lambda \Delta \mathbf{r}_{i+1} \quad (4.46)$$

donde el incremento de desplazamientos $\Delta \mathbf{r}_{i+1}$ para el método de Newton-Raphson según (4.36) se calcula como:

$$\Delta \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{r}_i) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i) \quad (4.47)$$

Al ser el residuo un vector, se debe definir un valor numérico que permita comparar distintas soluciones entre sí y poder determinar si la solución ha mejorado o no. Para ello se define una función $f(\mathbf{r}_i)$ a partir de la norma del vector residuos:

$$f(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i) \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{r}_i) \quad (4.48)$$

A partir de (4.48) se define una función g análoga que incluye el factor λ reductor de incrementos de desplazamientos:

$$g(\lambda_n) = f(\mathbf{r}_i + \lambda_n \Delta \mathbf{r}_{i+1}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i + \lambda_n \Delta \mathbf{r}_{i+1}) \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{r}_i + \lambda_n \Delta \mathbf{r}_{i+1}) \quad (4.49)$$

Si en (4.49) λ es igual a cero, $g(\lambda_n)$ es igual a la mitad del valor de la norma del residuo al inicio de la iteración. Y si λ es igual a la unidad $g(\lambda_n)$ toma el valor de la mitad de la norma del residuo para la nueva posición calculada según el método de resolución del sistema de ecuaciones no lineales (para el caso aquí tratado Newton-Raphson):

$$\lambda_0 = 0 \rightarrow g_0 = g(0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i) \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{r}_i) \quad (4.50)$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow g_1 = g(1) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_{i+1}) \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_{i+1}) \quad (4.51)$$

Puede ocurrir que la norma del residuo de la iteración $i+1$ sea menor que la de la iteración i ($g_1 < g_0$), en cuyo caso la nueva solución obtenida por el método de Newton-Raphson se acepta directamente. De no ser así, se define la función $g(\lambda)$ como una función cuadrática que se construye a partir de la información disponible en $\lambda_0=0$ y $\lambda_1=1$.

$$g(\lambda) = f(\mathbf{r}_i + \lambda \Delta \mathbf{r}_{i+1}) = [g_1 - g_0 - g'_0] \lambda^2 + g'_0 \lambda + g_0 \quad (4.52)$$

donde g_0 y g_1 ya son conocidos de (4.50) y (4.51). Para calcular g'_0 es necesario derivar en primer lugar (4.49) respecto de λ :

$$g'(\lambda_n) = f'(\mathbf{r}_i + \lambda_n \Delta \mathbf{r}_{i+1}) = \nabla \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{r}_i = (\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i) \mathbf{K}_T) - (\mathbf{K}_T^{-1} \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{r}_i)) = -\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i) \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{r}_i) \quad (4.53)$$

$$g'(\lambda_n) = -\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i) \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{r}_i) = -2g_0 \quad (4.54)$$

Sustituyendo ahora (4.54) en (4.52) se obtiene:

$$\begin{aligned} g(\lambda) = f(\mathbf{r}_i + \lambda \Delta \mathbf{r}_{i+1}) &= [g_1 - g_0 + 2g_0] \lambda^2 - 2g_0 \lambda + g_0 = \\ &= [g_1 + g_0] \lambda^2 - 2g_0 \lambda + g_0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Se recuerda que el objetivo es encontrar un valor λ que minimice la norma del residuo o lo que es lo mismo, que minimice la función $g(\lambda)$. Para buscar el mínimo de (4.55) se deriva la función y se iguala a cero:

$$g'(\lambda) = 2[g_1 + g_0] \lambda - 2g_0 = 0 \quad (4.56)$$

El mínimo de la función $g(\lambda)$ definida según (4.55) se da para:

$$\lambda = \frac{g_0}{g_1 + g_0} \quad (4.57)$$

Sustituyendo este nuevo valor de λ en (4.49) se puede calcular el nuevo residuo:

$$\lambda_2 = \frac{g_0}{g_1 + g_0} \rightarrow g_2 = g(\lambda_2) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i + \lambda_2 \Delta \mathbf{r}_{i+1}) \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{r}_i + \lambda_2 \Delta \mathbf{r}_{i+1}) \quad (4.58)$$

Si este nuevo residuo es menor que el residuo al inicio de la iteración g_0 se acepta λ_2 como factor reductor del incremento de desplazamientos. Pero si sigue siendo mayor será necesario volver a buscar un nuevo λ . Para las siguientes iteraciones se define la función $g(\lambda)$ como una función cúbica en λ , ya que ahora se dispone de un nuevo punto de información $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ con sus respectivos g_0, g_1, g_2 .

$$g(\lambda) = a\lambda^3 - b\lambda^2 + g'_0 \lambda + g_0 = a\lambda^3 - b\lambda^2 - 2g_0 \lambda + g_0 \quad (4.59)$$

Se puede plantear un sistema de dos ecuaciones para obtener los valores de a y b a partir de los valores conocidos de $g(\lambda)$ en λ_1 y λ_2 :

$$g(\lambda_1) = g_1 = a - b - 2g_0 + g_0 = g_1 \quad (4.60)$$

$$g(\lambda_2) = g\left(\frac{g_0}{g_1 + g_0}\right) = a\left(\frac{g_0}{g_1 + g_0}\right)^3 - b\left(\frac{g_0}{g_1 + g_0}\right)^2 - 2g_0\left(\frac{g_0}{g_1 + g_0}\right) + g_0 = g_2 \quad (4.61)$$

Que escrito en forma de sistema de ecuaciones resulta en:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1^2 & -1/\lambda_2^2 \\ -\lambda_2/\lambda_1^2 & \lambda_1/\lambda_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 - g_0(1-2\lambda_1) \\ g_2 - g_0(1-2\lambda_2) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

A partir de los valores a y b calculados a partir de (4.62) se obtiene un valor λ que minimiza la función (4.59):

$$\lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 6 \cdot a \cdot g_0}}{3a} \quad (4.63)$$

En caso de que el residuo calculado para el nuevo λ sea todavía mayor que el inicial g_0 debe continuarse el proceso. La función $g(\lambda)$ seguirá siendo cúbica según (4.59) pero para definir la nueva función se considerarán los valores de los dos últimos pasos realizados, es decir para λ_{n-2} y λ_{n-1} , y la información para $\lambda=0$:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_{n-2}^2 & -1/\lambda_{n-1}^2 \\ -\lambda_{n-1}/\lambda_{n-2}^2 & \lambda_{n-2}/\lambda_{n-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{n-2} - g_0(1-2\lambda_{n-2}) \\ g_{n-1} - g_0(1-2\lambda_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

A partir de los valores a, b obtenidos de (4.64) se volvería a calcular el nuevo λ_n según (4.63).

Darse cuenta que en caso de no encontrar una solución mejor que la inicial, el método globalmente convergente lo que hace es ir reduciendo poco a poco el incremento de desplazamientos inicial obtenido hasta que encuentre un residuo menor. De hecho, aunque no se puede generalizar, para los casos estudiados y que se presentan en el siguiente capítulo, el método globalmente convergente se aplica en prácticamente todas las iteraciones y sin su aplicación no se suele converger a una solución de equilibrio. Normalmente el factor λ_2 suele ser suficiente para disminuir el residuo respecto de la iteración anterior.

Como último apunte sobre el método globalmente convergente aplicado debe mencionarse que para evitar problemas de convergencia numérica, el ratio entre dos λ obtenidos consecutivamente debe estar comprendido entre 0.5 y 0.1 $\left(0.1 \leq \lambda_{n-1}/\lambda_n \leq 0.5\right)$.

4.3 Descripción del elemento finito

4.3.1 Justificación de la elección

El elemento finito que el programa emplea para la modelización de regiones D tridimensionales es el tetraedro de cuatro nodos, también conocido como tetraedro lineal o tetraedro de deformación constante. La razón por la que se ha escogido un tetraedro y no otro volumen es porque permite adaptarse a cualquier geometría. Además existen algoritmos que realizan el mallado de volúmenes a partir de tetraedros, lo que facilita su implementación. En cuanto al número de nodos, el tetraedro de diez nodos o cuadrático es mucho más eficiente, especialmente para el análisis tensional, y sería interesante implementarlo en el futuro, pero por el momento se ha decidido utilizar el tetraedro lineal ya que es más sencillo.

4.3.2 El tetraedro lineal

4.3.2.1 Geometría del tetraedro

En la siguiente figura se representa la geometría de un tetraedro de cuatro nodos, que queda definido por las coordenadas en el sistema de referencia global de sus cuatro esquinas. Se asume que las cuatro esquinas no están contenidas en el mismo plano. El elemento tiene seis aristas rectas, cada una definida por dos esquinas, y cuatro caras planas definidos por tres nodos. Al dominio ocupado por el tetraedro se le denomina Ω^e .

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) \quad (4.65)$$

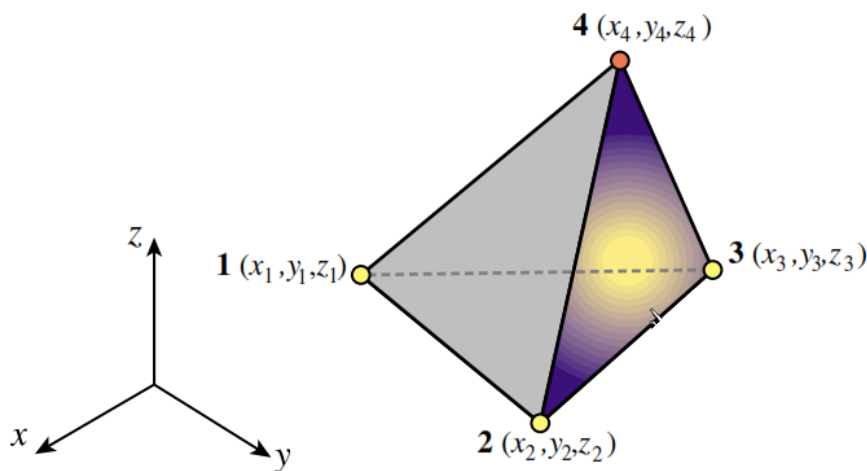


Figura IV. 3: Tetraedro de cuatro nodos o lineal (Felipa (2012) [20])

El volumen total que encierra el tetraedro, que no debe confundirse con el dominio Ω^e , se calcula fácilmente a partir de las coordenadas de los vértices según:

$$V = \int_{\Omega^e} d\Omega^e = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \det(\mathbf{J}) = \frac{1}{6} J \quad (4.66)$$

A la matriz \mathbf{J} se le conoce como matriz jacobiana \mathbf{J} y su determinante siempre debe ser positivo. Para que esto se cumpla, el sentido de numeración de los nodos 1,2 y 3, visto desde el nodo 4 debe ser en el sentido contrario a las agujas del reloj. Si el determinante de \mathbf{J} es igual a cero indica que los cuatros nodos son coplanares y por tanto no están definiendo un volumen. Este hecho debería identificarse como un error.

4.3.2.2 Coordenadas tetraédricas

Un punto dentro de un tetraedro se puede definir bien por sus coordenadas cartesianas (x,y,z) o por sus coordenadas tetraédricas. Mientras que en el sistema cartesiano se necesitan tres coordenadas para definir un punto, en coordenadas tetraédricas son necesarias cuatro coordenadas adimensionales.

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 \quad (4.67)$$

El valor de ζ_i es uno en el nodo i y vale cero en el resto de nodos, incluida toda la cara opuesta a la esquina i tiene la misma coordenada ζ_i .

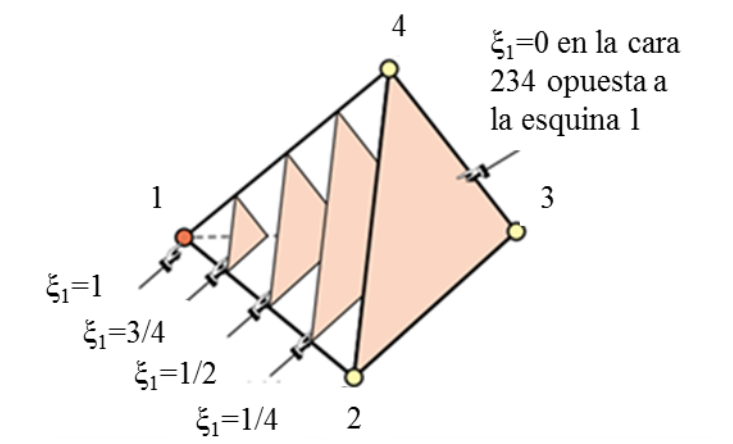


Figura IV. 4: Descripción coordenadas tetraédricas naturales [20]

Para un punto arbitrario P perteneciente al tetraedro, su coordenada tetraédrica ζ_i se puede calcular de dos modos:

$$(i) \quad \zeta_i = \frac{h_{pi}}{h_i} \quad (4.68)$$

donde h_{pi} es la distancia desde el punto P a la cara opuesta a la esquina i y h_i es la distancia desde la esquina i a su cara opuesta.

$$(ii) \quad \zeta_i = \frac{V_{pi}}{V} \quad (4.69)$$

donde V_{pi} es el volumen definido por el punto P y los vértices de la cara opuesta y V es el volumen del tetraedro.

Existe una restricción que deben cumplir las cuatro coordenadas tetraédricas, ya que exceden en uno el número necesario para definir un espacio tridimensional. Esta restricción es:

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 1 \quad (4.70)$$

que resulta fácil de comprobar a partir de la definición de las coordenadas tetraédricas según la ecuación (4.69) y teniendo en cuenta que $V_{p1} + V_{p2} + V_{p3} + V_{p4}$ debe ser igual al volumen V del tetraedro.

$$\frac{V_{p1} + V_{p2} + V_{p3} + V_{p4}}{V} = \frac{V_{p1}}{V} + \frac{V_{p2}}{V} + \frac{V_{p3}}{V} + \frac{V_{p4}}{V} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 1 \quad (4.71)$$

En el sistema de coordenadas tetraédrico las coordenadas de los vértices pasan a ser (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) y (0,0,0,1). Esto simplifica mucho las funciones de forma, lo que va a permitir expresiones matemáticas mucho más compactas como se verá a continuación.

$$N_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = \zeta_i \quad i = 1,2,3,4 \quad (4.72)$$

4.3.2.3 Interpolación lineal

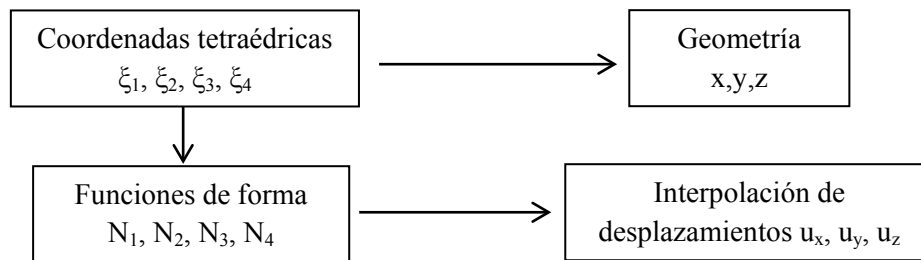
Cualquier función lineal $F(x,y,z)$, cuyos valores en los vértices del tetraedro sean F_1, F_2, F_3 y F_4 se puede interpolar en términos de las coordenadas tetraédricas como:

$$F(x, y, z) = F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = F_1\zeta_1 + F_2\zeta_2 + F_3\zeta_3 + F_4\zeta_4 \quad (4.73)$$

4.3.2.4 Transformación coordenadas cartesianas-coordenadas tetraédricas

A pesar de que el uso de las coordenadas tetraédricas permite expresiones matemáticas más sencillas, algunos resultados como desplazamientos, deformaciones o tensiones se deben expresar en el sistema general cartesiano $\{x,y,z\}$. Por lo tanto se necesita establecer una matriz de cambio de base entre las coordenadas cartesianas y las tetraédricas. A continuación se describe cómo se establece este cambio de base.

El tetraedro lineal es un elemento isoparamétrico, lo que significa que se emplean las mismas funciones de forma tanto para la geometría como para el resto de incógnitas, como pueden ser los desplazamientos. Darse que para el esquema inferior, las funciones de forma N_1, N_2, N_3, N_4 coinciden con las coordenadas tetraédricas según (4.72).



Y utilizando las mismas funciones empleadas para interpolar una función a partir del valor de la función en los vértices del tetraedro (4.73), se puede establecer la relación entre las coordenadas tetraédricas y las coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 x(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = x_i\xi_i \\
 y(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 + y_4\xi_4 = y_i\xi_i \\
 z(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= z_1\xi_1 + z_2\xi_2 + z_3\xi_3 + z_4\xi_4 = z_i\xi_i
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

A partir de (4.74) se establece la relación matricial:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} \tag{4.75}$$

Esta matriz 4x4 que relaciona coordenadas tetraédricas y cartesianas es la matriz jacobiana definida en (4.66). La relación inversa se obtiene por inversión de la matriz jacobiana resultando en:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 6V_{01} & y_{42}z_{32} - y_{32}z_{42} & x_{32}z_{42} - x_{42}z_{32} & x_{42}y_{32} - x_{32}y_{42} \\ 6V_{02} & y_{31}z_{43} - y_{34}z_{13} & x_{43}z_{31} - x_{13}z_{34} & x_{31}y_{43} - x_{34}y_{13} \\ 6V_{03} & y_{24}z_{14} - y_{14}z_{24} & x_{14}z_{24} - x_{24}z_{14} & x_{24}y_{14} - x_{14}y_{24} \\ 6V_{04} & y_{13}z_{21} - y_{12}z_{31} & x_{21}z_{13} - x_{31}z_{12} & x_{13}y_{21} - x_{12}y_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.76)$$

Donde para simplificar la expresión se ha introducido las siguientes abreviaciones:

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad z_{ij} = z_i - z_j \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} 6V_{01} &= x_2(y_3z_4 - y_4z_3) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_4(y_2z_3 - y_3z_2) \\ 6V_{02} &= x_1(y_4z_3 - y_3z_4) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_4(y_3z_1 - y_1z_3) \\ 6V_{03} &= x_1(y_2z_4 - y_4z_2) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_4(y_1z_2 - y_2z_1) \\ 6V_{04} &= x_1(y_3z_2 - y_2z_3) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_2z_1 - y_1z_2) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Si en la expresión (4.76) se hace coincidir las coordenadas (x,y,z) con el origen de coordenadas cartesianas (0,0,0), se obtiene:

$$\zeta_1 = V_{01}/V \quad \zeta_2 = V_{02}/V \quad \zeta_3 = V_{03}/V \quad \zeta_4 = V_{04}/V \quad (4.79)$$

que si se compara con (4.69) se identifica que V_{0i} es el volumen que encierra el tetraedro definido por la cara opuesta al vértice i y el origen de coordenadas cartesianas (0,0,0).

En (4.80) se compacta la expresión de (4.76) para facilitar su manejo posteriormente.

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 6V_{01} & a_1 & b_1 & c_1 \\ 6V_{02} & a_2 & b_2 & c_2 \\ 6V_{03} & a_3 & b_3 & c_3 \\ 6V_{04} & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.80)$$

4.3.3 Cálculo de la matriz \mathbf{B}^e

4.3.3.1 Campo de desplazamientos

El campo de desplazamientos dentro del tetraedro se obtiene por interpolación a partir de los desplazamientos de los vértices y de las funciones de forma. Haciendo en la expresión (4.73) F igual u_x , u_y y u_z se tiene que:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_{x1}N_1^e + u_{x2}N_2^e + u_{x3}N_3^e + u_{x4}N_4^e = u_{x1}\zeta_1 + u_{x2}\zeta_2 + u_{x3}\zeta_3 + u_{x4}\zeta_4 \\
 u_y &= u_{y1}N_1^e + u_{y2}N_2^e + u_{y3}N_3^e + u_{y4}N_4^e = u_{y1}\zeta_1 + u_{y2}\zeta_2 + u_{y3}\zeta_3 + u_{y4}\zeta_4 \\
 u_z &= u_{z1}N_1^e + u_{z2}N_2^e + u_{z3}N_3^e + u_{z4}N_4^e = u_{z1}\zeta_1 + u_{z2}\zeta_2 + u_{z3}\zeta_3 + u_{z4}\zeta_4
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Combinando (4.75) y (4.81) se obtiene la relación que evidencia el carácter isoparamétrico del tetraedro lineal:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \\ u_{z1} & u_{z2} & u_{z3} & u_{z4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{Bmatrix} \tag{4.82}$$

4.3.3.2 Campo de deformaciones

Las deformaciones que sufre un sólido están relacionadas con el campo de desplazamientos según:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{4.83}$$

Por lo tanto el vector de deformaciones se puede obtener a partir del vector de desplazamientos de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \tag{4.84}$$

Darse cuenta que en ingeniería, para la deformación transversal, en el vector de deformaciones se incluye dos veces el valor calculado en (4.83), estando este valor relacionado directamente con la variación angular que se produce.

Combinando (4.81) y (4.84):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}\zeta_1 + u_{x2}\zeta_2 + u_{x3}\zeta_3 + u_{x4}\zeta_4 \\ u_{y1}\zeta_1 + u_{y2}\zeta_2 + u_{y3}\zeta_3 + u_{y4}\zeta_4 \\ u_{z1}\zeta_1 + u_{z2}\zeta_2 + u_{z3}\zeta_3 + u_{z4}\zeta_4 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_4}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \zeta_3}{\partial z} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \zeta_4}{\partial z} & \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \zeta_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{z3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ u_{z4} \end{Bmatrix} \quad (4.86)$$

En (4.86) se establece la relación entre el vector desplazamientos \mathbf{u} y el vector deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, donde en \mathbf{u} se han ordenado los desplazamientos nodo a nodo. A la matriz que relaciona los desplazamientos con las deformaciones se le conoce como matriz \mathbf{B}^e . Combinando (4.80) y (4.86) se puede escribir:

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 \\ b_1 & a_1 & 0 & b_2 & a_2 & 0 & b_3 & a_3 & 0 & b_4 & a_4 & 0 \\ 0 & c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 \\ c_1 & 0 & a_1 & c_2 & 0 & a_2 & c_3 & 0 & a_3 & c_4 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Como puede observarse la matriz \mathbf{B}^e es una matriz constante para cada elemento finito, lo que significa que el campo de deformaciones dentro de cada elemento finito será constante. Esto implica que sólo va a necesitarse un punto de integración de Gauss para cada elemento finito.

4.3.4 Fuerzas de volumen

El cálculo de las fuerzas de volumen en regiones D puede ser necesario cuando el peso propio de la estructura sea una carga importante, como puede ocurrir en vigas de gran canto. Las fuerzas nodales externas equivalentes se calculan de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 \\ \zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \\ \zeta_4 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} d\Omega^e \quad (4.88)$$

Para el caso de peso propio resulta en la división del peso de cada elemento finito en cuatro partes iguales para cada nodo.

4.4 Matriz constitutiva \mathbf{D}^e

Como ya se ha visto anteriormente, la matriz constitutiva \mathbf{D} relaciona deformaciones y tensiones. Para un material con comportamiento elástico-lineal e isotrópico, la matriz constitutiva \mathbf{D} en tres dimensiones puede escribirse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material y ν el coeficiente de Poisson.

Sin embargo, el hormigón es un material con un marcado comportamiento no lineal debido principalmente a su baja capacidad para resistir tracciones. Esto provoca la aparición de fisuras y por consiguiente la pérdida de rigidez. Esta particularidad debe ser tenida en cuenta a la hora de obtener la matriz constitutiva en función del campo de deformaciones presente en el elemento finito.

Además se debe distinguir entre la matriz constitutiva secante \mathbf{D}_S y la matriz constitutiva tangente \mathbf{D}_T , a partir de las cuales se obtienen las respectivas matrices de rigidez \mathbf{K}_S y \mathbf{K}_T . La matriz secante se utiliza para el cálculo del residuo en cada iteración y la matriz tangente para obtener el incremento de desplazamientos en cada iteración a partir del residuo existente según el método de Newton-Raphson anteriormente descrito (ver Figura IV. 5).

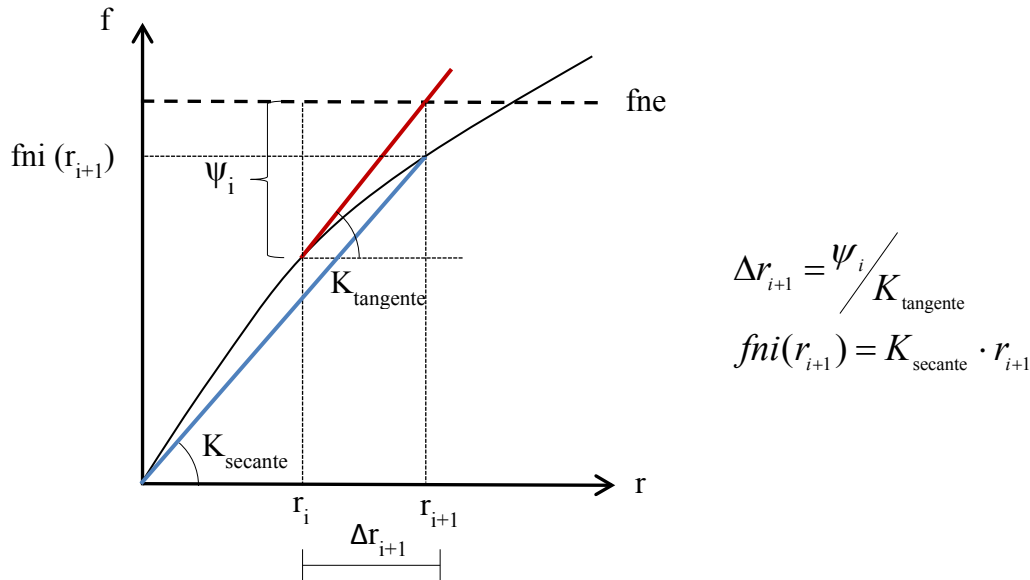


Figura IV. 5: Matriz de rigidez tangente vs. matriz de rigidez secante

En cuanto a la notación que se utiliza a continuación, para diferenciar el sistema de referencia en el que el vector o la matriz están referidos, se utilizará el superíndice i cuando se hace referencia al sistema de coordenadas general o global y el superíndice l cuando se haga referencia a la base principal. Como base principal se entiende aquella en la que las tensiones y deformaciones tangenciales son cero y, por tanto, en la que tanto el tensor de tensiones como el de deformaciones es una matriz diagonal. Esta base será muy importante, ya que será en este sistema de referencia donde se comprobará si el hormigón ha fisurado o no, y en caso de ser necesario se corregirá el módulo de elasticidad del material en una determinada dirección. En el sistema de coordenadas general, la base principal es una base ortonormal que queda definida por tres vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Estos tres vectores definen las direcciones principales 1, 2 y 3, respectivamente, y son los vectores propios que se obtienen al diagonalizar el tensor de deformaciones expresado en el sistema global. La matriz de cambio de la base principal a los ejes globales es:

$$T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

4.4.1 Modelo de fisuración

El modelo que se emplea para considerar la fisuración es el de aproximación difusa (*smearred crack approach*). Este modelo es válido cuando se quiere conocer la respuesta global de la estructura en servicio y en rotura, pero no permite estudiar el comportamiento local. No requiere que la malla se modifique durante el análisis.

La idea fundamental es que la fisuración hace que el hormigón pierda rigidez, aunque siga siendo un medio continuo. Se chequea para cada punto de integración si se rebasa o no el criterio de fisuración. Si se ha rebasado el criterio se modifica el módulo de elasticidad en esa dirección y, por tanto, varía la matriz constitutiva. En el modelo numérico definido en este trabajo fin de máster se considera que el hormigón ha fisurado en una dirección principal cuando la deformación en esa dirección principal es mayor que cero.

4.4.2 Matriz constitutiva secante \mathbf{D}_s^e

Esquemáticamente, los pasos necesarios para obtener la matriz de rigidez constitutiva secante en los ejes generales son los siguientes:

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{C}^\sigma \boldsymbol{\sigma}^1 \quad (4.91)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{D}_s^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 \end{array} \quad (4.92)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{C}^\sigma \mathbf{D}_s^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 \quad (4.93)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow \boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{C}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}^i \end{array} \quad (4.94)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{C}^\sigma \mathbf{D}_s^1 \mathbf{C}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{D}_s^i \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (4.95)$$

$$\mathbf{D}^i = \mathbf{C}^\sigma \mathbf{D}_s^1 \mathbf{C}^\varepsilon \quad (4.96)$$

Se parte de la relación que existe entre el vector de tensiones expresado en la base principal $\boldsymbol{\sigma}^1$ y el expresado en el sistema de coordenadas global $\boldsymbol{\sigma}^i$ (4.91) (ver apartado 4.4.2.1 para el cálculo de la matriz \mathbf{C}^σ que los relaciona). Después se sustituye $\boldsymbol{\sigma}^1$ por el producto de la matriz constitutiva en principales \mathbf{D}_s^1 y el vector de deformaciones en principales $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ (4.92). De esta manera quedan relacionados $\boldsymbol{\sigma}^i$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ (4.93). Lo que interesa no obstante es relacionar tensiones y deformaciones en el sistema de referencia global. Para ello se sustituye $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ por el vector de deformaciones en el sistema de referencia global $\boldsymbol{\varepsilon}^i$. Estos dos vectores están relacionados a partir de una matriz de cambio de base \mathbf{C}^ε (4.94) (ver apartado 4.4.2.2 para el cálculo de \mathbf{C}^ε).

En resumen, la matriz constitutiva \mathbf{D}_s^i en el sistema de coordenadas general se obtiene a partir de la matriz constitutiva \mathbf{D}_s^1 en la base principal y dos matrices \mathbf{C}^σ y \mathbf{C}^ε que relacionan las deformaciones y tensiones en la base principal y en el sistema de coordenadas general. De

esta manera, la modificación del módulo de elasticidad en función del campo de deformaciones no se realiza en los ejes generales, si no en la base principal, que resulta muy sencillo como se verá posteriormente.

A continuación se procede a describir cómo se obtiene cada uno de estos términos.

4.4.2.1 Matriz cambio de base tensiones \mathbf{C}^σ

La matriz \mathbf{C}^σ que relaciona las tensiones según (4.91) se obtiene a partir de los tensores de tensiones en el sistema de referencia global y en la base principal. Se identifica a la matriz de cambio de base de los ejes principales a los generales como T (4.90). La relación que existe entre el tensor de deformaciones expresado en las dos bases es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = T \times \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \times T^T \quad (4.97)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Queda claro en (4.98) que las tensiones en el sistema de coordenadas global están relacionadas con las tensiones en la base principal a través de los vectores que definen las direcciones principales. Para obtener de manera simplificada la relación que se establece con cada una de las tensiones principales, se puede proceder a hacer nulas dos de las tensiones principales. Haciendo σ_2 y σ_3 cero se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = T \times \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times T^T = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{bmatrix} \times \sigma_1 \quad (4.99)$$

Realizando la misma operación para σ_2 y σ_3 y escribiendo las expresiones en forma matricial se obtiene \mathbf{C}^σ :

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 \\ u_2^2 & v_2^2 & w_2^2 \\ u_3^2 & v_3^2 & w_3^2 \\ u_1u_2 & v_1v_2 & w_1w_2 \\ u_2u_3 & v_2v_3 & w_2w_3 \\ u_1u_3 & v_1v_3 & w_1w_3 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^\sigma \boldsymbol{\sigma}^1 \quad (4.100)$$

4.4.2.2 Matriz cambio de base deformaciones \mathbf{C}^e

De manera similar se puede obtener la matriz \mathbf{C}^e . No obstante, en esta ocasión el cambio de tensor debe ser de globales a principales y la matriz de cambio de base debe ser la inversa de (4.90). Si la base principal es ortonormal (que lo será en nuestro caso), la inversa de la matriz es igual a la traspuesta y la relación final que se establece es:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = T^T \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times T = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 v_1 & u_1 w_1 \\ u_1 v_1 & v_1^2 & v_1 w_1 \\ u_1 w_1 & v_1 w_1 & w_1^2 \end{bmatrix} \times \varepsilon_{xx} \quad (4.101)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

En el apartado 4.4.2.1 únicamente se sustituían en los valores de la diagonal, ya que al estar en la base principal el resto eran nulos. Sin embargo, ahora el tensor donde se está realizando la sustitución de valores es el tensor de deformaciones en el sistema global, donde los valores fuera de la diagonal no tienen por qué ser nulos. Se sustituye pues también para los valores fuera de la diagonal, teniendo en cuenta el carácter tensorial (el elemento 12 es igual al 21; el elemento 23 es igual al 32; y el elemento 13 es igual al 31).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} &= T^T \times \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times T = \begin{bmatrix} 2u_1 u_2 & u_2 v_1 + u_1 v_2 & u_2 w_1 + u_1 w_2 \\ u_2 v_1 + u_1 v_2 & 2v_1 v_2 & v_2 w_1 + v_1 w_2 \\ u_2 w_1 + u_1 w_2 & v_2 w_1 + v_1 w_2 & 2w_1 w_2 \end{bmatrix} \times \varepsilon_{xy} = \\ &= \begin{bmatrix} u_1 u_2 & (u_2 v_1 + u_1 v_2)/2 & (u_2 w_1 + u_1 w_2)/2 \\ (u_2 v_1 + u_1 v_2)/2 & v_1 v_2 & (v_2 w_1 + v_1 w_2)/2 \\ (u_2 w_1 + u_1 w_2)/2 & (v_2 w_1 + v_1 w_2)/2 & w_1 w_2 \end{bmatrix} \times \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Realizando el mismo procedimiento para ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{yz} , ε_{xz} y escribiendo las relaciones en forma matricial se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_1 u_2 & u_2 u_3 & u_1 u_3 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_1 v_2 & v_2 v_3 & v_1 v_3 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & w_1 w_2 & w_2 w_3 & w_1 w_3 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (4.104)$$

4.4.2.3 Matriz constitutiva secante \mathbf{D}_s^e en principales

La matriz constitutiva secante en principales se expresa como:

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_s^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 \quad (4.105)$$

donde E_j es el módulo de elasticidad del hormigón en la dirección principal j . Su valor depende del valor de la deformación principal ε_j en esa dirección y cada dirección principal se trata de manera independiente, por lo que la obtención de \mathbf{D}_s^1 resulta muy sencilla.

En un principio, si todas las deformaciones principales son negativas (compresión) y menores que la tensión de plastificación, el módulo de elasticidad en las tres direcciones principales es igual al módulo de elasticidad del hormigón. Si en una dirección principal j la deformación es mayor que cero implica que la deformación es de tracción. Asumiendo que el hormigón no tiene capacidad para resistir tracciones se supondrá que el hormigón ha fisurado en esa dirección y por tanto el módulo de elasticidad E_j se hará cero en esa dirección principal. Para evitar problemas numéricos no se hace el valor estrictamente cero, si no que se divide el módulo de elasticidad del hormigón por 10^7 . Este número es lo suficientemente grande como para que a pesar de poder tener deformaciones de tracción grandes en una dirección, al multiplicar por el módulo de elasticidad fisurado la tensión de tracción resultante sea prácticamente cero. Por ejemplo, con un valor divisor de 10^3 , como van a aparecer en elementos fisurados grandes deformaciones de tracción podrían aparecer tensiones de tracción en el hormigón no despreciables.

En el estado actual del programa se considera un comportamiento del hormigón elasto-plástico en compresión, pero si se quisiera considerar cualquier otra ley constitutiva se podría implementar fácilmente. El módulo de elasticidad secante se calcularía para cada deformación ε_i como división de la tensión actual σ_i y ε_i .

4.4.3 Matriz constitutiva tangente \mathbf{D}_T^e

Esquemáticamente, los pasos necesarios para obtener la matriz de rigidez constitutiva tangente en los ejes globales son los siguientes:

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{C}^\sigma \boldsymbol{\sigma}^1 \quad (4.106)$$

$$\downarrow \quad \leftarrow \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} (\mathbf{C}^\sigma \boldsymbol{\sigma}^1) = \frac{\partial \mathbf{C}^\sigma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} \boldsymbol{\sigma}^1 + \mathbf{C}^\sigma \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} \quad (4.108)$$

$$\downarrow \quad \leftarrow \quad \text{Regla de la cadena} \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} = \frac{\partial \mathbf{C}^\sigma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^1} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} \boldsymbol{\sigma}^1 + \mathbf{C}^\sigma \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^1} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} \cong \mathbf{C}^\sigma \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^1} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} = \mathbf{C}^\sigma \mathbf{D}_T^1 \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} \quad (4.110)$$

A diferencia de la matriz constitutiva secante que relaciona tensiones y deformaciones, la matriz de constitutiva tangente relaciona incrementos de tensiones e incrementos de deformaciones. Se hace necesario por tanto obtener las derivadas del vector de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^i$ respecto de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^i$, ambos vectores expresados en el sistema de coordenadas global. Partiendo de (4.106) se derivan ambos términos respecto de las deformaciones en ejes globales (4.107). Para facilitar el cálculo de las derivadas se aplica la regla de la cadena respecto de las deformaciones principales $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ (4.109), ya que estas derivadas resultan más sencillas de calcular.

Según (4.110) sería necesario calcular la derivada de la matriz \mathbf{C}^σ respecto de las direcciones principales. En un primer momento se despreció este término debido a la dificultad de obtener estas derivadas de forma analítica, que representan la variación de los vectores principales cuando varían las deformaciones. En dos dimensiones resultan sencillas de obtener analíticamente, pero no en tres dimensiones. No obstante se comprobó que el programa converge a una solución despreciando este término, por lo que finalmente se considera que esta simplificación es aceptable. Resultaría interesante estudiar más a fondo en un futuro este término ya que en principio permitiría acelerar el proceso de convergencia. De alguna manera podría decirse que este término ayudaría a centrarse más rápidamente a las bielas durante el proceso iterativo

A continuación se procede a describir cómo se obtiene cada uno de estos términos.

4.4.3.1 Matriz constitutiva tangente \mathbf{D}_T^e en principales

Se ha definido anteriormente a la base principal como aquella en la que las tensiones y deformaciones tangenciales son cero. Sin embargo, cuando se habla de matriz tangente se debe hablar de incrementos tanto de deformaciones como de tensiones. Un incremento de

deformaciones desde una configuración inicial provocará que respecto de la base principal de la configuración inicial, las nuevas deformaciones tangenciales no sean cero y, por tanto, tampoco las tensiones tangenciales. Es necesario por tanto tener en cuenta que va a haber variaciones tangenciales como se considera a continuación:

$$d\boldsymbol{\sigma}^1 = \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \\ d\tau_{23} \\ d\tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{t12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{t23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{t13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \\ d\gamma_{12} \\ d\gamma_{23} \\ d\gamma_{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_T^1 d\boldsymbol{\varepsilon}^1 \quad (4.111)$$

En la expresión anterior los valores G_{tj} relacionan las tensiones tangenciales con las deformaciones angulares. A continuación se describe cómo obtener estos valores:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 + \Delta\sigma_{11} \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 + \Delta\sigma_{22} \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 + \Delta\sigma_{33} \\ \tau_{12} &= 0 + \Delta\tau_{12} \rightarrow \tan 2\theta_{12}^\sigma = \frac{\Delta\tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \\ \tau_{23} &= 0 + \Delta\tau_{23} \rightarrow \tan 2\theta_{23}^\sigma = \frac{\Delta\tau_{23}}{\sigma_{22} - \sigma_{33}} \\ \tau_{13} &= 0 + \Delta\tau_{13} \rightarrow \tan 2\theta_{13}^\sigma = \frac{\Delta\tau_{13}}{\sigma_{11} - \sigma_{33}} \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 + \Delta\varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} &= 0 + \Delta\gamma_{12} \rightarrow \tan 2\theta_{12}^\varepsilon = \frac{\Delta\gamma_{12}}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})} \\ \gamma_{23} &= 0 + \Delta\gamma_{23} \rightarrow \tan 2\theta_{23}^\varepsilon = \frac{\Delta\gamma_{23}}{2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})} \\ \gamma_{13} &= 0 + \Delta\gamma_{13} \rightarrow \tan 2\theta_{13}^\varepsilon = \frac{\Delta\gamma_{13}}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Partiendo de una situación inicial donde las tensiones principales son $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, y su base principal, se realiza un incremento de tensiones que supone que las tensiones en la base principal de la configuración inicial son $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$. El ángulo de los nuevos ejes principales respecto de los antiguos se puede calcular a partir de estas tensiones (4.112). Del mismo modo se puede proceder para las deformaciones (4.113).

Aplicando el principio de coaxialidad según el cual las direcciones principales en tensiones y deformaciones son las mismas, los ángulos de giro también serán los mismos.

$$\tan 2\theta_{12}^{\sigma} = \tan 2\theta_{12}^{\varepsilon} \quad \tan 2\theta_{23}^{\sigma} = \tan 2\theta_{23}^{\varepsilon} \quad \tan 2\theta_{13}^{\sigma} = \tan 2\theta_{13}^{\varepsilon} \quad (4.114)$$

De igualar los términos resulta que:

$$\Delta\tau_{12} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})} \Delta\gamma_{12} = G_{t12} \Delta\gamma_{12} \quad (4.115)$$

En esta expresión queda definida la relación que existe entre las nuevas deformaciones angulares y las tensiones tangenciales, expresadas ambas en la base principal antigua. En principio sería necesario conocer σ_{11} , σ_{22} , ε_{11} , ε_{22} para calcular G_{t12} . Es decir, que sería necesario obtener primero los incrementos $\Delta\sigma_{11}$, $\Delta\sigma_{22}$, $\Delta\varepsilon_{11}$, $\Delta\varepsilon_{22}$ para calcular cuál es el incremento de las tensiones tangenciales. Como esto no es posible ya que la solución es en principio desconocida, se calculan los módulos de rigidez transversal G_t a partir de las tensiones y deformaciones principales iniciales. Cuando los incrementos de tensiones y deformaciones son pequeños el error que se comete al realizar esta aproximación es asumible. Aplicando esto a las tres direcciones se obtiene que:

$$\begin{aligned} G_{t12} &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})} \cong \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \\ G_{t23} &= \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})} \cong \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \\ G_{t13} &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})} \cong \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \end{aligned} \quad (4.116)$$

Para considerar el comportamiento elasto-plástico del hormigón en compresión, cuando la deformación del hormigón en una de las direcciones principales supere la de plastificación se toma para el módulo de elasticidad en esa dirección un valor igual al módulo de elasticidad del hormigón dividido entre 10^3 .

En el estado actual del programa se considera un comportamiento del hormigón elasto-plástico en compresión, pero si se quisiera considerar cualquier otra ley constitutiva se podría implementar fácilmente. El módulo de elasticidad tangente en cada dirección principal se calcularía para cada deformación ε_j a partir de la derivada de la función que relaciona σ_j y ε_j .

4.4.3.2 Matriz cambio de base tensiones C^{σ}

Comparado con el cálculo de la matriz de cambio de base de tensiones para la matriz constitutiva secante, ahora se debe tener en cuenta que el nuevo tensor de tensiones en la base principal antigua ya no va a tener por qué ser una matriz diagonal y, por lo tanto aparecen nuevos términos que deben considerarse. Estos nuevos términos son τ_{12} , τ_{23} , τ_{13} .

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = T \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \times T^T \quad (4.117)$$

Procediendo de la misma manera que en el apartado 4.4.2.1 para los estos términos no considerados anteriormente se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = T \times \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times T^T = \begin{bmatrix} 2u_1v_1 & u_2v_1 + u_1v_2 & u_3v_1 + u_1v_3 \\ u_2v_1 + u_1v_2 & 2u_2v_2 & u_3v_2 + u_2v_3 \\ u_3v_1 + u_1v_3 & u_3v_2 + u_2v_3 & 2u_3v_3 \end{bmatrix} \times \tau_{12} \quad (4.118)$$

Ordenados matricialmente la matriz C^σ es la siguiente:

$$\sigma^i = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & 2u_1v_1 & 2v_1w_1 & 2u_1w_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & w_2^2 & 2u_2v_2 & 2v_2w_2 & 2u_2w_2 \\ u_3^2 & v_3^2 & w_3^2 & 2u_3v_3 & 2v_3w_3 & 2u_3w_3 \\ u_1u_2 & v_1v_2 & w_1w_2 & u_2v_1 + u_1v_2 & v_2w_1 + v_1w_2 & u_2w_1 + u_1w_2 \\ u_2u_3 & v_2v_3 & w_2w_3 & u_3v_2 + u_2v_3 & v_3w_2 + v_2w_3 & u_3w_2 + u_2w_3 \\ u_1u_3 & v_1v_3 & w_1w_3 & u_3v_1 + u_1v_3 & v_3w_1 + v_1w_3 & u_3w_1 + u_1w_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = C^\sigma \sigma^1 \quad (4.119)$$

A diferencia de la anterior matriz que era de 6x3 esta nueva matriz C^σ para el cálculo de la matriz constitutiva tangente es de 6x6.

4.4.3.3 Matriz cambio de base deformaciones C^ϵ

De igual manera también tendrá que tenerse en cuenta que ahora las deformaciones angulares principales no van a ser nulas:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = T^T \times \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \times T \quad (4.120)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = T^T \times \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times T = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1v_1 & u_1w_1 \\ u_1v_1 & v_1^2 & v_1w_1 \\ u_1w_1 & v_1w_1 & w_1^2 \end{bmatrix} \times \epsilon_{xx} \quad (4.121)$$

Ordenados de manera matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_1u_2 & u_2u_3 & u_1u_3 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_1v_2 & v_2v_3 & v_1v_3 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & w_1w_2 & w_2w_3 & w_1w_3 \\ 2(u_1v_1) & 2(u_2v_2) & 2(u_3v_3) & (u_2v_1 + u_1v_2) & (u_3v_2 + u_2v_3) & (u_3v_1 + u_1v_3) \\ 2(v_1w_1) & 2(v_2w_2) & 2(v_3w_3) & (v_2w_1 + v_1w_2) & (v_3w_2 + v_2w_3) & (v_3w_1 + v_1w_3) \\ 2(u_1w_1) & 2(u_2w_2) & 2(u_3w_3) & (u_2w_1 + u_1w_2) & (u_3w_2 + u_2w_3) & (u_3w_1 + u_1w_3) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.122)$$

Darse que a la hora de expresar el vector de deformaciones se hace referencia a las deformaciones angulares γ_{ij} mientras que de las relaciones entre tensores se obtiene ε_{ij} . Por eso, las tres últimas filas de la matriz \mathbf{C}^e se obtienen de multiplicar por dos los resultados obtenidos de las relaciones tensoriales.

4.5 Matriz de rigidez \mathbf{K}^e

Como ya se ha visto anteriormente, la matriz de rigidez \mathbf{K} para cada elemento finito se obtiene a partir de la matriz \mathbf{B} y de la matriz constitutiva \mathbf{D} según:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega^e \quad (4.123)$$

Para la matriz de rigidez tangente se empleará la matriz constitutiva tangente \mathbf{D}_s^e y para la matriz de rigidez secante la matriz constitutiva secante \mathbf{D}_s^e . Para un mismo elemento finito e la matriz constitutiva \mathbf{D}^e tendrá que actualizarse para cada iteración en función del estado tensional del elemento finito. La matriz \mathbf{B}^e será constante para todas las iteraciones durante el proceso no lineal ya que no se consideran no linealidades geométricas.

Como el elemento finito escogido es de deformación constante para calcular la matriz \mathbf{K}^e sólo es necesario un único punto de integración.

4.6 Contribución armado

4.6.1 Representación de la armadura

En el modelo numérico la armadura se modeliza por representación discreta. Las armaduras se tratan como elementos uniaxiales. Hormigón y armadura se encuentran conectados por los nodos de la armadura, que serán comunes con algunos nodos de los elementos finitos de hormigón. La desventaja de esta representación es que o bien los nodos deben adaptarse a la posición de la armadura o la posición de la armadura se debe ajustar a los nodos más próximos.

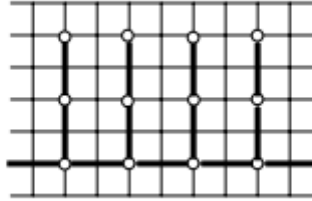


Figura IV. 6: Representación discreta de la armadura (Delgado (2008) [17])

Además de esta representación existen al menos otras dos posibilidades para la modelización de las armaduras pasivas en estructuras de hormigón armado. La más sencilla es la representación difusa, donde se supone que la armadura está distribuida en el hormigón con una orientación particular. Su contribución a la capacidad resistente de la estructura se tiene en cuenta modificando la ecuación constitutiva del hormigón, dando lugar a un material equivalente a la suma de hormigón y acero. Esta representación no es admisible para la herramienta informática presentada donde la disposición de las armaduras va a tener una influencia determinante en el modelo de BT resultante. Otro tipo es la representación embebida, donde se considera que las armaduras son elementos axiales construidos en los elementos de hormigón con un campo de desplazamientos consistente con el hormigón.

4.6.2 Descripción del elemento finito

El elemento finito elegido para modelizar la armadura es el elemento barra de 6 grados de libertad. En realidad, debido a que únicamente se considera la capacidad resistente de la armadura en su dirección axial, en el sistema de referencia local definido por el eje longitudinal de la armadura únicamente interesan los dos grados de libertad que corresponden con los dos desplazamientos longitudinales en ambos extremos. Con carácter general al pasar del sistema local al sistema de referencia global estos dos grados de libertad se traducen en 6 grados de libertad en el espacio, aunque dependiendo de la orientación de la barra podrían ser 4 (si está contenida en un plano) o 2 (si tiene la dirección de uno de los ejes globales).

4.6.3 Comportamiento no lineal del acero

Se considera un comportamiento bilineal para el acero. El usuario puede definir los módulos de elasticidad de ambas ramas (valores habituales son 200000 MPa para la primera rama y 1000 MPa para la segunda).

Para el cálculo de la matriz de rigidez secante, el módulo de elasticidad se calcula a partir de la deformación de la armadura y la tensión que le corresponde para esa deformación.

4.6.4 Matriz de rigidez armadura \mathbf{K}^e

La matriz de rigidez de un elemento que únicamente tiene capacidad resistente en su dirección axial se obtiene fácilmente. Siendo su rigidez igual a EA/L , la matriz de rigidez del elemento en el sistema de referencia local que define su eje longitudinal es:

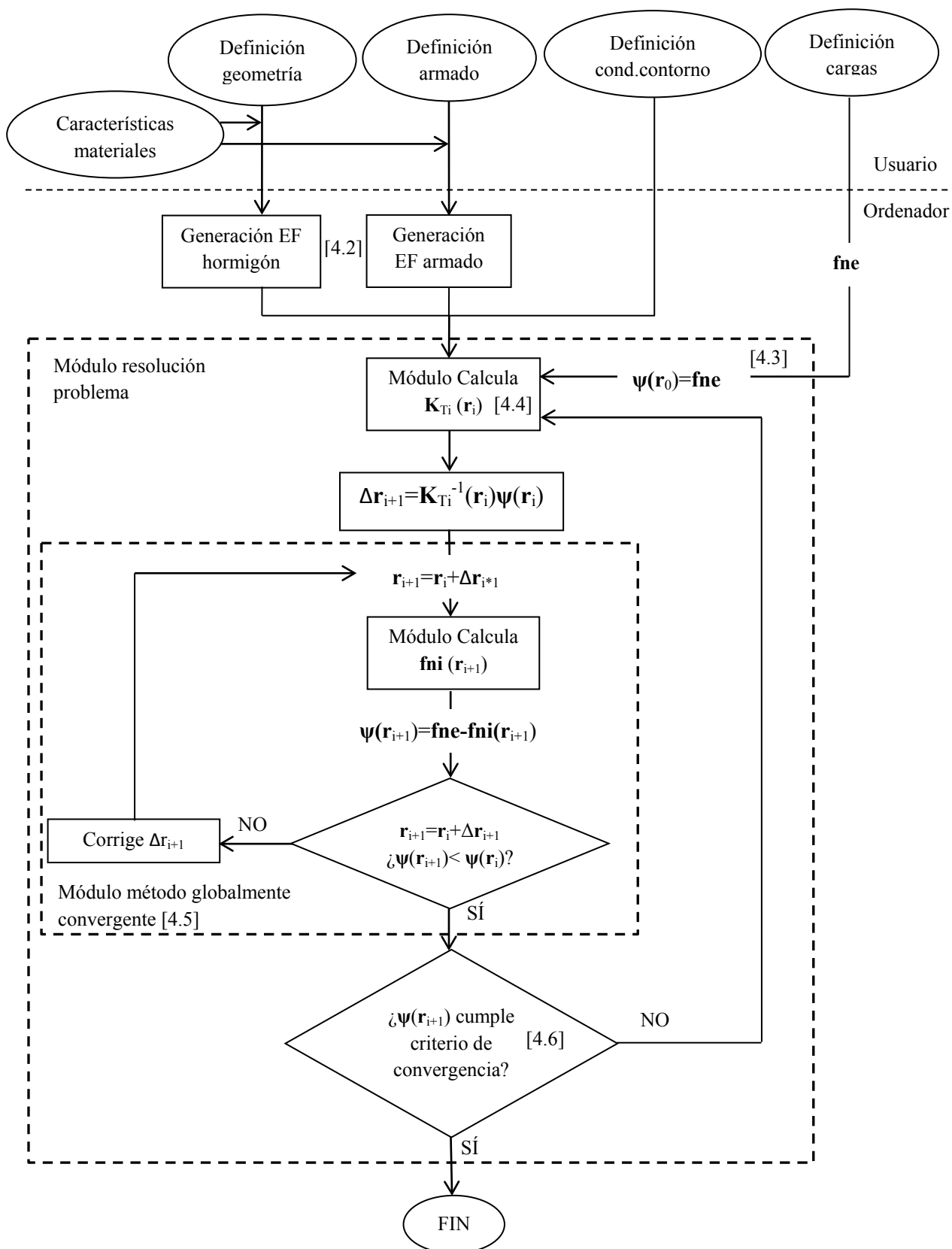
$$\mathbf{K}_L^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

Tras obtener la matriz de rigidez en el sistema local es necesario realizar un cambio de ejes. Si la dirección de la armadura se define en el sistema de referencia global por un vector de coordenadas (a_1, a_2, a_3) el cambio de ejes se realiza de la siguiente forma:

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{T} \mathbf{K}_L^e \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \\ a_3 & 0 \\ 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Para cada elemento finito que compone cada armadura se calcula su matriz de rigidez y se ensambla en la matriz de rigidez global de la estructura que considera tanto la contribución de las armaduras como del hormigón. Al igual que para el hormigón se deberá diferenciar para las armaduras entre matriz de rigidez secante y matriz de rigidez tangente.

4.7 Estructura de la herramienta informática



[4.1] El usuario define:

- Geometría: límites geométricos de la región objeto de estudio y tamaño de la malla que se aplicará para la modelización.
- Armado: localización de cada una de las barras de armado y área de las mismas.
- Condiciones de contorno.
- Cargas actuantes.
- Características de los materiales: hormigón (resistencia a compresión, módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson) y acero (módulo de elasticidad, límite elástico).

[4.2] A partir de la información suministrada por el usuario el ordenador genera en primer lugar la malla y luego asigna a cada uno de los elementos sus características en función de su geometría y las propiedades de los materiales definidas.

Para cada elemento finito de hormigón se almacena su tensor de deformaciones, su tensor de tensiones, direcciones principales, matriz B, matriz D (secante y tangente), matriz K (secante y tangente), fuerzas nodales internas, coordenadas de los nodos, desplazamientos de los nodos. Para los elementos finitos de armadura se almacena su deformación.

[4.3] Para la primera iteración el residuo es igual a las fuerzas nodales externas aplicadas ya que se parte de la posición no deformada y por tanto las fuerzas nodales internas son nulas.

[4.4] Para la primera iteración la matriz de rigidez tangente corresponde a la matriz de rigidez no fisurada. Para iteraciones sucesivas la rigidez tangente para cada elemento finito se calcula en función de su estado de deformaciones (ver apartado 4.4.3).

[4.5] Módulo método globalmente convergente. Se calcula el incremento de desplazamientos Δr_{i+1} a partir del residuo $\psi(r_i)$ y de la matriz de rigidez tangente. En caso de que el nuevo residuo $\psi(r_{i+1})$ sea mayor que el residuo de la iteración anterior $\psi(r_i)$ comienza un proceso iterativo en el que se corrige el incremento de desplazamiento hasta que el incremento corregido sea tal que $\psi(r_{i+1})$ sea menor que $\psi(r_i)$.

[4.6] El criterio de parada no sólo debe hacer terminar el proceso en caso de que se alcance una solución de equilibrio, si no que también debe evitar un proceso iterativo indefinido en el que no se esté mejorando la solución de una iteración a otra. Por ejemplo, en el estado actual del programa, si no se consigue mejorar la solución en tres iteraciones sucesivas el programa termina el proceso.

4.8 Entorno MATLAB

El modelo numérico descrito en este capítulo se ha implementado en el programa MATLAB (MATrix LABoratory [30]), que tiene un lenguaje de programación propio de computación técnica de alto nivel. Se emplea en muchos campos de la ciencia y la técnica y está especialmente indicado para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. También es cierto que dependiendo de las aplicaciones puede ser más lento que códigos equivalentes desarrollados en C/C++ o Fortran.

MATLAB contiene una gran biblioteca de funciones (álgebra lineal, estadística, análisis de Fourier, filtraje, optimización, integración numérica,...) que facilitan mucho la programación. Algunas funciones permiten incluso integrar algoritmos basados en MATLAB con aplicaciones y lenguajes externos como C/C++, FORTRAN, Java, COM y Microsoft Excel.

Una de las características que lo hace tan atractivo es la amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones para la visualización de datos. También se pueden crear interfaces gráficas de usuario personalizadas lo que permite que el usuario desarrolle programas y les dote de una presentación similar a programas comerciales (véase como ejemplo el *MEFBT* presentado en el apartado 2.6.4).

4.9 Limitaciones del modelo numérico

El trabajo presentado en este documento debe entenderse como una primera aproximación a la modelización de regiones D tridimensionales. Los resultados obtenidos del análisis de algunas regiones D tridimensionales muestran que el modelo numérico propuesto es capaz de generar automáticamente las bielas que se forman a partir de la disposición de armado. Sin embargo, existen ciertas limitaciones que se enumeran a continuación.

- En el estado actual se trata de una herramienta de verificación, ya que el usuario debe introducir la cuantía de armadura. Por lo tanto, no permite el dimensionamiento de regiones D.
- El modelo numérico es capaz de predecir el comportamiento de la región D para niveles cercanos a la máxima capacidad de carga, pero no para niveles de carga menores, como los que puedan darse en estado límite de servicio. No hay que olvidar no obstante que el MBT es de aplicación para estado límite último. Como no se considera la resistencia a tracción del hormigón ni el efecto *tension-stiffening*, la rigidez de la región calculada por el modelo numérico para niveles de carga donde esta contribución es importante (estado no fisurado, estado límite de servicio) es mucho menor que la real. Por lo tanto, no se puede aplicar para el análisis en el estado límite de servicio.
- La fisuración se considera mediante una aproximación difusa. Este planteamiento es válido cuando se quiere conocer la respuesta global de la estructura, pero no el

comportamiento local. Por ejemplo no se puede conocer con exactitud cuál será la abertura máxima de fisura en rotura.

- En cuanto al comportamiento del hormigón en compresión, se considera una ley elasto-plástica y se desprecia el efecto que tiene el estado triaxial de tensiones. Por lo tanto, se asume que el comportamiento del hormigón sometido a un estado uniaxial de tensiones es igual que cuando está bajo un estado triaxial. No se considera por tanto el efecto del confinamiento. El comportamiento del hormigón en la realidad es distinto y la resistencia del hormigón en una dirección principal está influenciado por el estado tensional en las otras dos.
- El modelo numérico no comprueba que la capacidad de las zonas nodales no se vea excedida.
- Se considera una adherencia perfecta entre hormigón y acero por lo que no se considera el deslizamiento.
- El tamaño de la malla está influenciado por la posición de las armaduras, lo que puede provocar un tamaño de malla más pequeño del realmente necesario, ralentizando el proceso de cálculo. Además, la malla es uniforme en todo el volumen de la región modelizada. Lo ideal sería que pudiera refinarse en aquellas zonas donde se dé un campo tensional más complejo y emplear una malla más amplia en el resto de zonas.
- Cargas puntuales (cargas, apoyos o incluso la fuerza interna que puede introducir una armadura en el caso de que la tensión en su extremo no sea nula) pueden dar lugar a problemas de convergencia. Por lo tanto, antes de tomar un resultado como válido hay que estudiar el valor del residuo para esa solución.

5 Aplicación del modelo numérico a elementos estructurales

5.1 Bloque de anclaje

Con el análisis del bloque de anclaje que se presenta en este apartado se pretende demostrar la capacidad del modelo numérico propuesto para generar un campo tensional en función de la configuración de armado dispuesta. Estableciendo la analogía entre el campo tensional y el modelo de BT equivalente se comprueba que los resultados son coherentes y que por tanto no es necesario que el usuario defina la geometría completa del modelo de BT tridimensional. Es más, en aquellas situaciones en las que el proyectista no tenga una configuración de armado definida, puede optar por disponer armadura en las diferentes zonas posibles y será el propio programa el que identificará qué armaduras son necesarias y cuáles no.

5.1.1 Descripción

Se considera un bloque de anclaje igual que el propuesto por FIB (2002) [21]. Las dimensiones del bloque son 67.5x60x40cm y se encuentra apoyado en tres puntos en su cara inferior (dos deslizaderas (nudos 2 y 3) y una rótula (nudo 4)). Con estas condiciones de contorno la estructura sería un mecanismo ya que sólo hay cinco restricciones. Se restringe adicionalmente el desplazamiento en la dirección longitudinal del nudo 1 para conseguir una estructura isostática (posteriormente se comprobará que la reacción en el nudo 1 es cero). Las cargas externas aplicadas son las que se representan en la Figura V. 1. Para evitar problemas

de convergencia, ya que las cargas aplicadas van a ser puntuales, se ha decidido disminuir las cargas respecto de las iniciales. Por lo tanto, no debe extrañar al lector que las fuerzas que aparecen en los tirantes resulten en cuantías de armado muy pequeñas. No obstante no debe verse como una deficiencia, ya que el objetivo último del análisis de este bloque de anclaje es demostrar la capacidad de generación de campos tensionales del modelo numérico.

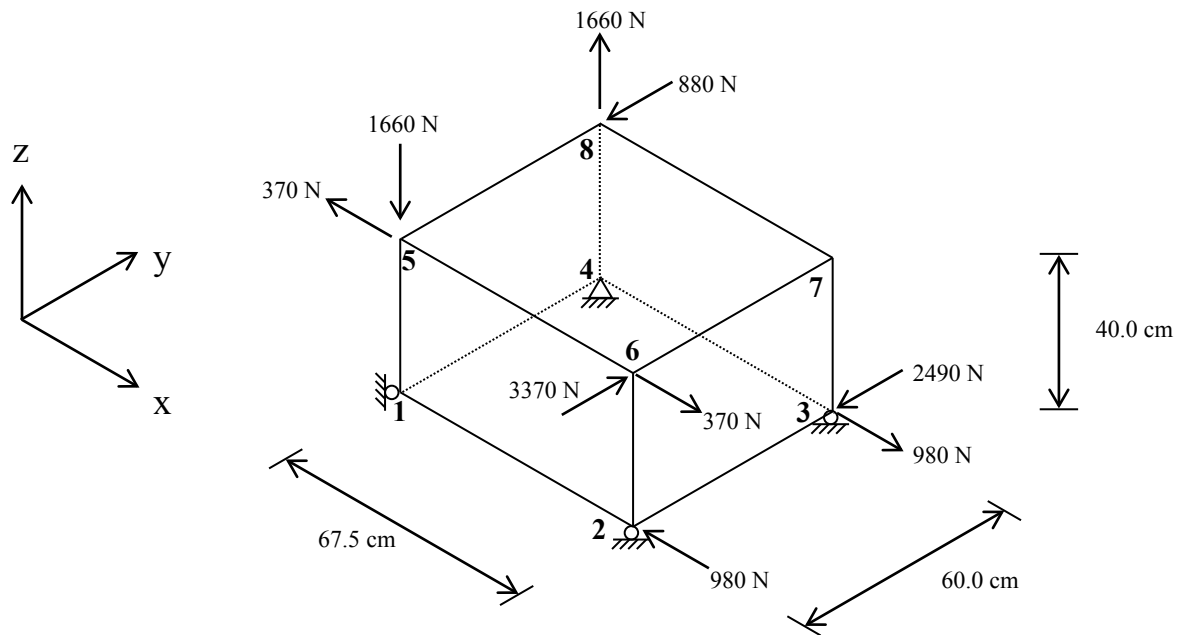


Figura V. 1: Configuración bloque de anclaje

5.1.2 Modelización

El bloque se ha discretizado inicialmente con 8064 elementos finitos de igual tamaño donde los lados de los tetraedros orientados en las direcciones X, Y, Z tienen una longitud de 4.8cm, 5cm, 5cm, respectivamente (ver Figura V. 2). Las características mecánicas del material consideradas son 26000 MPa el módulo de elasticidad del hormigón, 0.2 el coeficiente de Poisson del hormigón y 200000 MPa el módulo de elasticidad del acero.

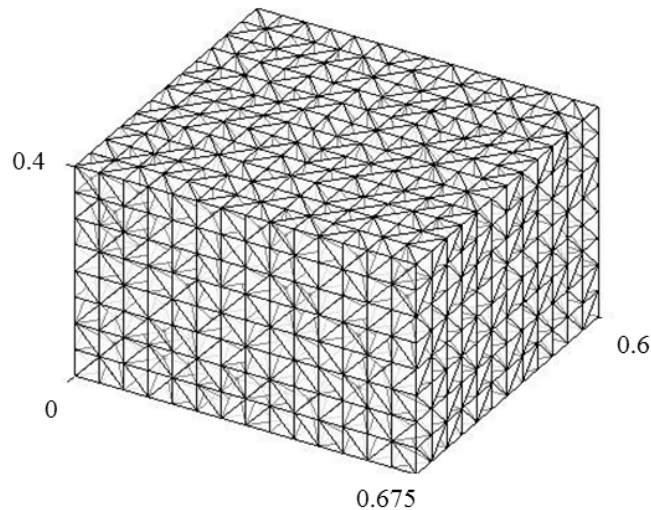
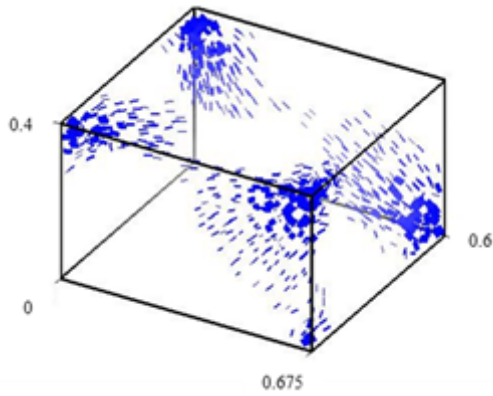


Figura V. 2: Discretización con elementos finitos del bloque de anclaje de hormigón

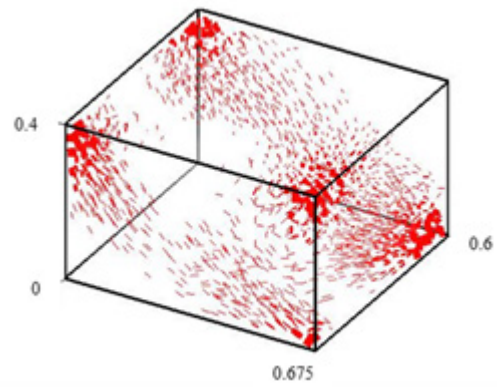
5.1.3 Análisis elástico lineal

En primer lugar se procede a realizar un análisis del bloque considerando un comportamiento elástico lineal del hormigón, sin disponer ninguna barra de armado. En las siguientes imágenes se pueden observar diferentes vistas de los flujos de tracciones (en azul) y compresiones (en rojo) obtenidos. Para mayor claridad se han representado únicamente aquellas tracciones y compresiones que superan una cierta magnitud.

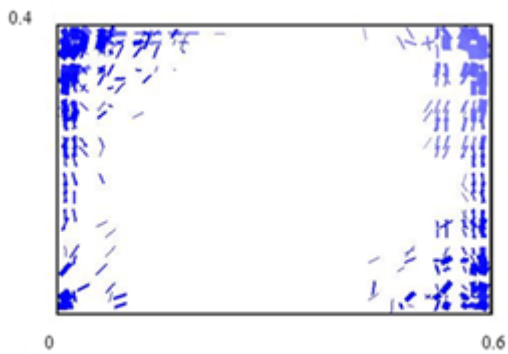
En las imágenes (a), (b), (c), (d), (e) y (f) se han representado los flujos de tracciones y compresiones separadamente. En la imagen (g) se ha representado conjuntamente el flujo de tracciones y compresiones en la cara frontal que forman los nudos 1-2-5-6. Se observa claramente como existe un flujo de tracciones (azul) que desvía el flujo de compresiones (rojo) para llevarlas del nudo 2 al 5.



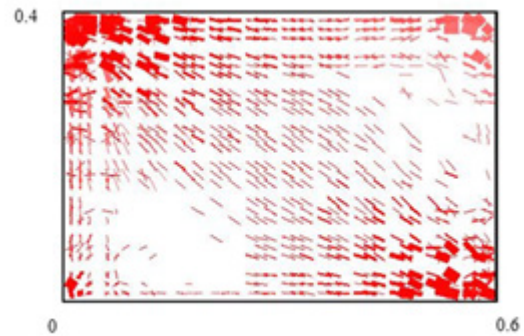
(a) Flujo tracciones. Vista general



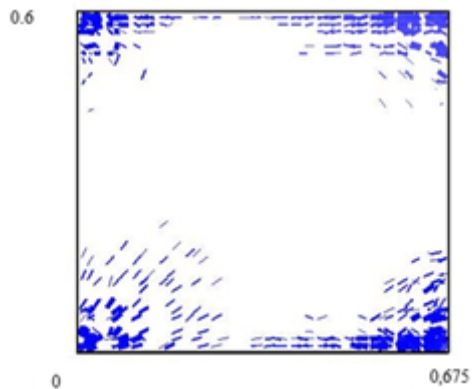
(b) Flujo compresiones. Vista general



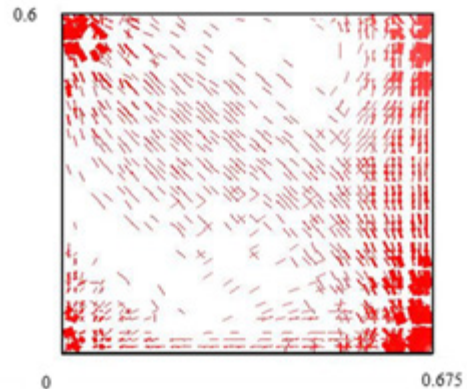
(c) Flujo tracciones. Vista lateral plano YZ



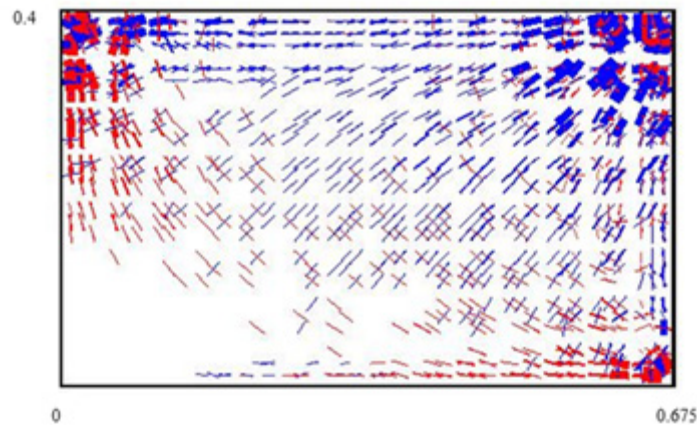
(d) Flujo compresiones. Vista lateral plano YZ



(e) Flujo tracciones. Vista planta plano XY



(f) Flujo compresiones. Vista planta plano XY



(g) Flujo tracciones-compresiones. Vista alzado plano XZ ($0 < y < 0.15m$)

Figura V. 3: Flujos de tracciones y compresiones del análisis elástico lineal del bloque de anclaje

5.1.4 Definición del modelo de bielas y tirantes

En la Figura V. 4 se representa el modelo de BT que se propone para el bloque de anclaje. Siguiendo las recomendaciones enunciadas en 2.4.3 el modelo de BT se debe aproximar lo máximo posible al flujo de tensiones del análisis elástico lineal. Este modelo coincide con el propuesto por Leu et al. (2006) [27], aunque en ese caso los autores lo obtuvieron tras la aplicación de técnicas de optimización topológica.

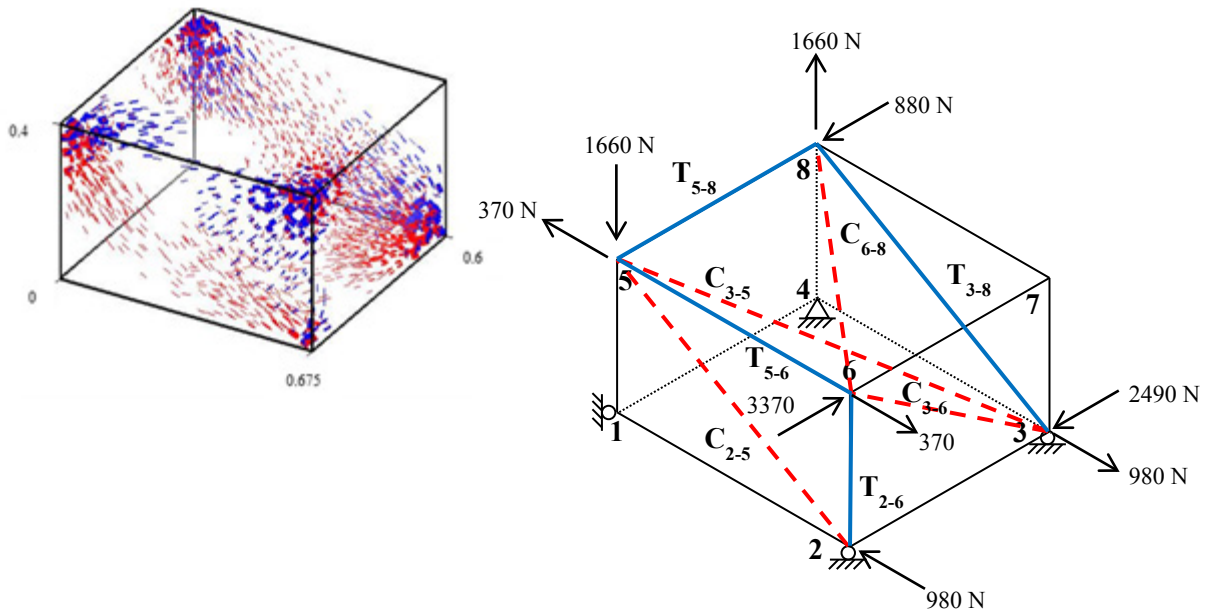


Figura V. 4: Campo tensional del análisis elástico-lineal y modelo de BT propuesto

La solución requiere de cuatro tirantes, siendo uno de ellos inclinado (T_{3-8}). El hecho de tener que disponer un tirante inclinado no sólo puede generar dificultades desde un punto de vista constructivo, si no también en la modelización. Como se describe en el apartado 4.6 cada barra de armado con una determinada trayectoria se subdivide en elementos finitos, siendo los extremos de cada uno de los elementos finitos los puntos resultantes de la intersección de su trayectoria con los nodos de la malla del sólido. Con el mallado realizado para el análisis elástico lineal el tirante inclinado queda dividido en dos elementos finitos (Figura V. 5 (a)), por lo que se reduce mucho la capacidad de captar una posible variación de la fuerza a lo largo del mismo. Para solventar este inconveniente se propone un nuevo mallado para incrementar el número de elementos finitos en el que quedará subdividido este tirante. Esta nueva malla está formada por 9000 elementos finitos, siendo las longitudes de los tetraedros en las direcciones X, Y, Z 6.75 cm, 4 cm y 4 cm, respectivamente. Con este nuevo mallado se consigue que el tirante inclinado quede dividido en 10 elementos (Figura V. 5 (b)).

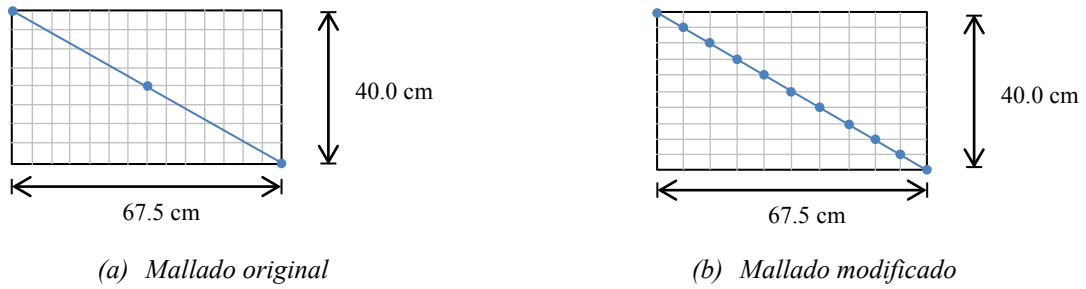


Figura V. 5: Discretización del tirante en función del mallado seleccionado

5.1.5 Análisis del modelo de bielas y tirantes propuesto

Con el mallado modificado se procede al análisis del bloque de anclaje habiendo dispuesto armadura según el modelo de BT definido y considerando el comportamiento no lineal de acero y hormigón. El número de iteraciones realizadas hasta alcanzar el criterio de convergencia (se ha alcanzado por no reducir la norma del residuo más de 0.0001 en tres iteraciones) es de 202, necesitando un tiempo total de casi 1 hora 20 minutos. La norma del residuo obtenido tras las 202 iteraciones es menor del 0.5% de la norma del residuo inicial. Este valor indica que los resultados cuantitativos no serán totalmente precisos. Es difícil obtener residuos pequeños cuando las cargas son puntuales como se ha considerado en este ejemplo. En la Figura V. 6 se representa gráficamente la evolución del residuo con el número de iteraciones.

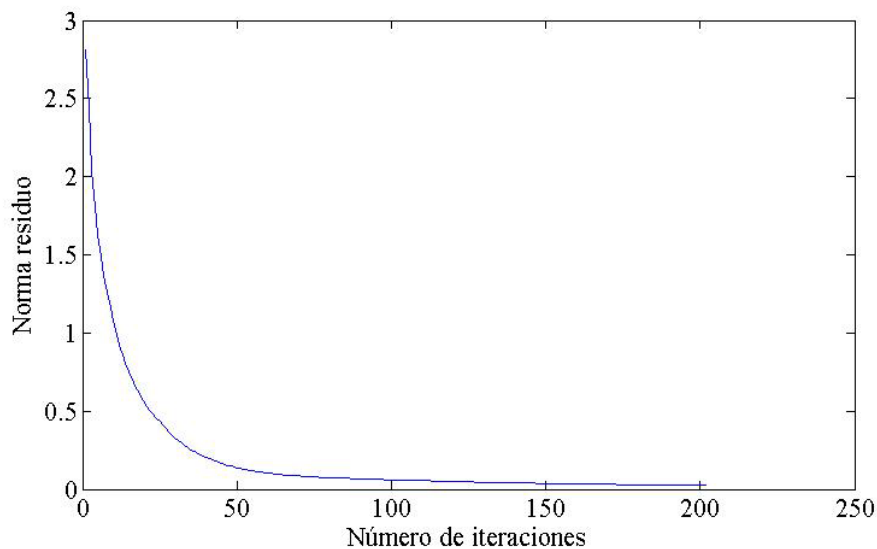
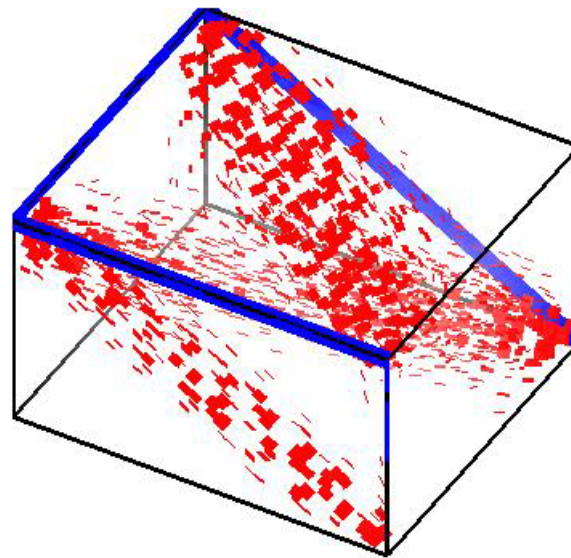


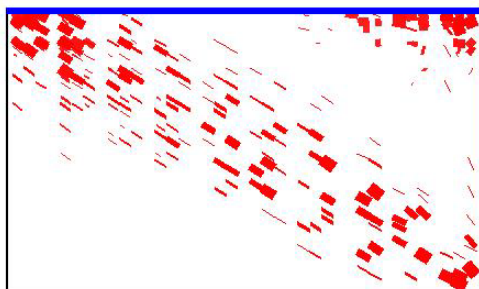
Figura V. 6: Evolución del residuo con el número de iteraciones

En la Figura V. 7 se representa gráficamente el flujo de compresiones en el hormigón y la tracción en los tirantes. Las tensiones de compresión en el hormigón están representadas por trazos de color rojo que definen la dirección de la tensión principal y cuyo grosor depende del valor de la tensión (mayor valor, mayor espesor). Los tirantes están representados por líneas

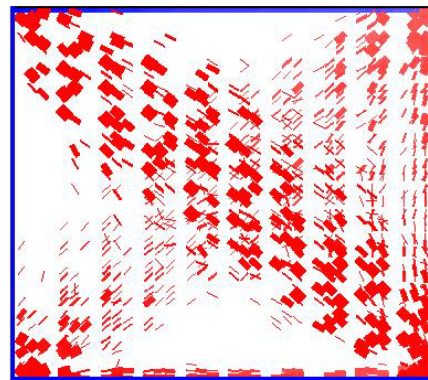
continuas de color azul, cuyo grosor es directamente proporcional a la tracción que deben resistir. En caso de que una de las armaduras resultará estar en compresión aparecería de color rojo. Gráficamente se puede observar que los tirantes T_{3-8} y T_{5-6} son los más solicitados.



(a) Vista general



(b) Vista alzado. Plano 1256



(c) Vista superior

Figura V. 7: Campo tensional resultante del modelo propuesto para el bloque de anclaje

A continuación se procede a comparar los resultados del modelo numérico con los resultados que se obtendrían del análisis de la estructura de barras equivalente. Estos últimos resultados se obtienen fácilmente estableciendo el equilibrio en los nudos. En la Tabla V. 1 se recogen las fuerzas que aparecen en cada una de las bielas y tirantes.

Tirantes			Bielas		
Elemento	Longitud (cm)	Fuerza (N)	Elemento	Longitud (cm)	Fuerza (N)
T_{2-6}	40.0	580.7	C_{2-5}	78.5	-1139.1
T_{5-6}	67.5	3181.2	C_{3-5}	98.8	-2665.1
T_{5-8}	60.0	1618.9	C_{3-6}	72.1	-1046.9
T_{3-8}	78.5	3256.2	C_{6-8}	90.3	-3761.3

Tabla V. 1: Relación de fuerzas resultantes en cada uno de los elementos del análisis de la estructura de barras para el modelo propuesto

Las diferencias que aparecen entre los resultados cuantitativos obtenidos del modelo numérico y del análisis de la estructura de barras se deben a:

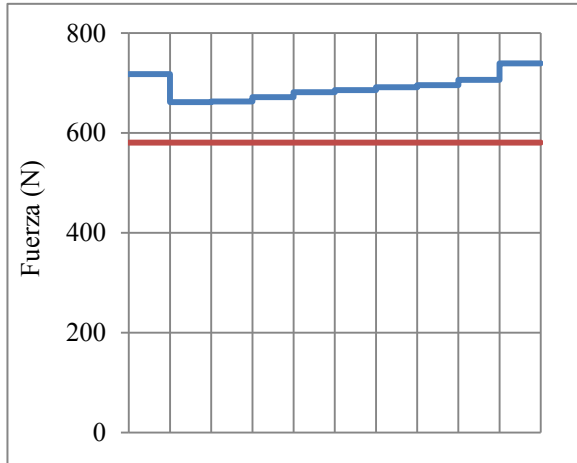
- (i) En el cálculo de la estructura de barras se asume que las bielas siguen una dirección recta conectando dos nudos. En el modelo numérico pueden darse pequeñas desviaciones respecto de esta línea recta lo que provocará que el ángulo de incidencia de la resultante de compresiones en el nudo sea diferente y por lo tanto cambien las fuerzas de los diferentes elementos.
- (ii) En el cálculo de la estructura de barras se simplifica el mecanismo de transmisión de tensiones entre el hormigón y el acero y se considera que la transmisión de fuerzas entre bielas y tirantes se produce sólo en los nudos. Sin embargo, con el modelo numérico sí que se puede captar la posible variación de la fuerza a lo largo de cada uno de los tirantes, lo que es más realista. Por ejemplo, en el caso de una biela que se apoye en un tirante, similar a lo que ocurre en el nudo 2 del bloque de anclaje objeto de estudio, el modelo numérico es capaz de captar que esta transmisión de esfuerzos se produce a lo largo de una cierta longitud del tirante y por lo tanto la fuerza en el tirante T_{2-6} no será constante (ver Figura V. 7 (b)). Por el contrario, en la estructura de barras la biela apoya en un único punto y todo el tirante está sometido a la misma fuerza.

En las gráficas de la Figura V. 8 se compara para cada uno de los cuatro tirantes los resultados obtenidos del análisis de la estructura de barras (línea roja horizontal) y los resultados obtenidos del modelo numérico (línea azul). Las líneas verticales delimitan para cada uno de los tirantes los elementos finitos en los que quedan divididos.

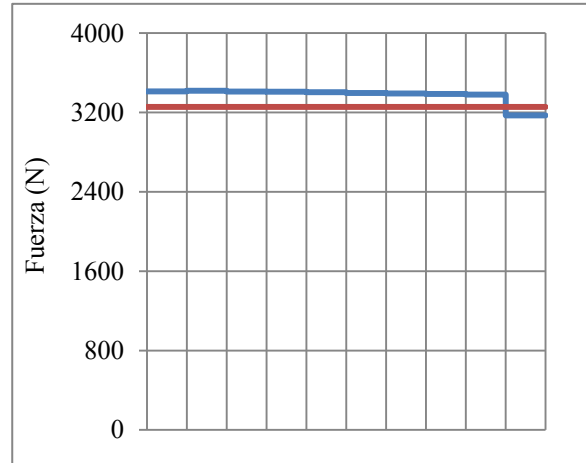
El modelo numérico es capaz de detectar la variación de fuerza que se produce en el tirante T_{2-6} y que es consistente con el campo tensional representado en la Figura V. 7(b), donde se aprecia como además de la biela inclinada C_{2-5} que confluye al nudo 2 existen unas compresiones descendentes a la izquierda del tirante que hacen que la fuerza del mismo vaya aumentando con el canto. Del análisis de la estructura de barras equivalente no se puede obtener esta información ya que se asume que la transmisión de fuerzas entre los distintos elementos es puntual. La diferencia entre los valores numéricos obtenidos se justifica más adelante.

Para el resto de tirantes la fuerza predicha por el modelo numérico es prácticamente constante, pero difiere ligeramente de la calculada a partir de la estructura de barras equivalente. En la siguiente tabla se comparan estos valores, donde para las fuerzas resultantes del modelo numérico se ha tomado un valor medio.

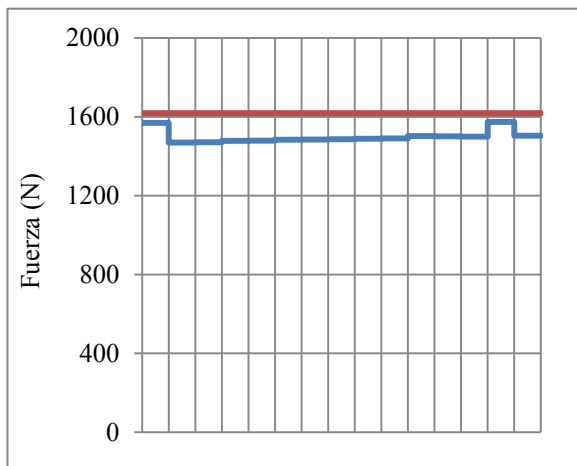
Elemento	Estruct. Barras (kN)	Modelo num. (kN)	Dif. (%)
T_{3-8}	3256.2	3405.0	+4%
T_{5-8}	1618.9	1485.0	-9%
T_{5-6}	3181.2	2855.3	-11%



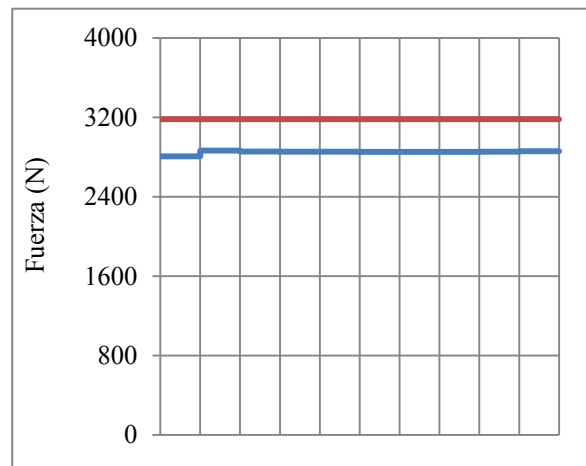
(a) Tirante T_{2-6}



(b) Tirante T_{3-8}



(c) Tirante T_{5-8}



(d) Tirante T_{3-6}

Figura V. 8: Variación de la fuerza a lo largo de los tirantes

Las diferencias entre los valores cuantitativos obtenidos no son excesivas como se deduce de los gráficos y la tabla superiores. Son debidas a que el ángulo de incidencia que la estructura de barras asume para las bielas no es exactamente el mismo que resulta del modelo numérico. Aunque estas diferencias no son significativas, se justifican a continuación.

- Tirante T_{3-8} :

El modelo de barras considera que la biela C_{6-8} está contenida en la cara superior horizontal del bloque de anclaje y, por lo tanto, únicamente tiene componentes de fuerza horizontales. Sin embargo, el modelo numérico tiene en cuenta de alguna manera que la biela tiene un área determinada, con anchura y profundidad, y las compresiones del nudo 6 al 8 no sólo se transmiten por el plano estrictamente superior. Al llegar al nudo 8 las compresiones van a “buscar” el nudo y aquellas que no discurren justo por el plano superior tendrán una pequeña componente vertical. La suma de las pequeñas componentes verticales de las compresiones provocará que la tracción en el tirante T_{3-8} sea algo superior a la predicha por la estructura de barras.

Del equilibrio de fuerzas en la dirección z en el nudo 8:

$$\sum F_z = C_{6-8}^z + T_{3-8}^z + 1660 = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum F_z = C_{6-8}^z - 3405.0 \cdot \sin(30.65) + 1660 = 0 \quad (5.2)$$

$$C_{6-8}^z = 75.8kN \quad (5.3)$$

Se asume que el valor de la resultante de compresiones es igual a la fuerza de la biela del modelo de barras (3761.3kN). Por tanto, el ángulo que forma con el plano horizontal es igual a 1.15°. Esta pequeña desviación del ángulo de incidencia respecto del plano horizontal provoca esa variación del 4% que se detecta en los resultados.

Se desecha la posibilidad de que haya ciertas componentes verticales por compresiones en la trayectoria del nudo 4 al 8, ya que la reacción vertical en el nudo 4 es nula.

- Tirante T₅₋₈:

El modelo de barras asume que la dirección de la biela C₆₋₈ queda definida por la línea recta que une los nudos 6 y 8. Al igual que se justificaba para el tirante T₃₋₈, el modelo numérico tiene en cuenta que la biela tendrá una cierta anchura y la resultante de las compresiones no tiene por qué seguir una línea recta perfecta entre los nudos. Como se observa en la figura inferior donde se representa una vista en planta del campo tensional, el flujo de compresiones se desvía muy ligeramente de la línea recta a trazos. Gráficamente se representa en trazo discontinuo la dirección de la biela asumida en el modelo de barras y en trazo continuo la trayectoria aproximada de la resultante de compresiones del modelo numérico. El ángulo que forma la resultante de compresiones de la biela C₆₋₈ con los tirantes T₅₋₈ y T₃₋₆ es mayor que el considerado por el modelo de barras y, por tanto, la tracción en estos dos tirantes disminuye respecto de la del modelo de barras.

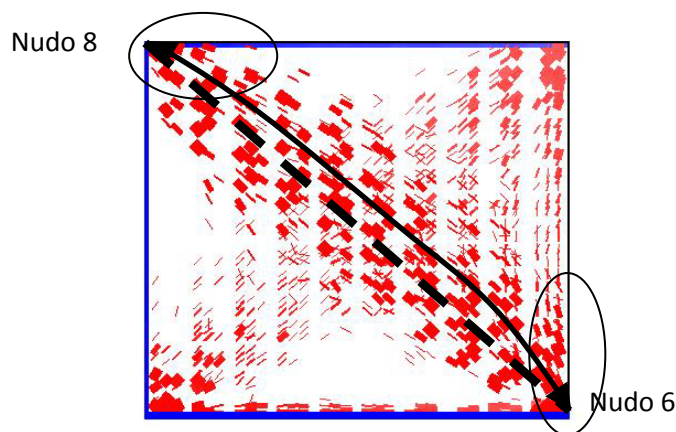


Figura V. 9: Vista en planta del campo tensional generado y dirección de la biela C₆₋₈

A continuación se demuestra numéricamente la diferencia de ángulos que se intuye gráficamente. Del equilibrio de fuerzas en la dirección y en el nudo 8:

$$\sum F_y = C_{6-8}^y + T_{5-8} - 880 = 0 \quad (5.4)$$

$$\sum F_z = C_{6-8}^y - 1485.0 - 880 = 0 \quad (5.5)$$

$$C_{6-8}^y = 2365.0kN \quad (5.6)$$

Asumiendo que la resultante de compresiones de la biela C_{6-8} es igual a la del modelo de barras (3761.3kN), el ángulo que forma con el tirante T_{5-8} es de 51.03° , frente a los 48.37° del modelo de barras. Al aumentar el ángulo disminuye la tracción del tirante T_{5-8} . Este ángulo de 51.03° es consistente con el ángulo que forma la biela C_{6-8} y el tirante T_{3-8} en el plano horizontal, que se puede obtener del equilibrio de fuerzas en la dirección x en el nudo 8:

$$\sum F_x = C_{6-8}^x + T_{5-8}^x = 0 \quad (5.7)$$

$$\sum F_x = C_{6-8} \cos \theta_z \cos \theta_x - T_{5-8} \cos(30.65) = 0 \quad (5.8)$$

$$\sum F_x = 3761.3 \cos(1.15) \cos \theta_x - 3405.0 \cos(30.65) = 0 \quad (5.9)$$

$$\theta_x = 38.83^\circ \quad (5.10)$$

Si se suman ambos ángulos, obtenidos a partir de los resultados numéricos del modelo numérico y que hacen referencia a la resultante de compresiones, se comprueba que efectivamente ambos suman 90° .

- Tirante T_{3-6} :

Al igual que para el tirante T_{5-8} , el ángulo entre el tirante y la biela que predice el modelo numérico no es exactamente igual que el supuesto por el modelo de barras. Del equilibrio de fuerzas en la dirección x en el nudo 6 se tiene:

$$\sum F_x = C_{6-8}^x + T_{5-6} - 370 = 0 \quad (5.11)$$

$$\sum F_x = 3761.3 \cos \theta_z \cos \theta_x - 2855.3 + 370 = 0 \quad (5.12)$$

donde θ_z se obtiene del equilibrio de fuerzas verticales en el nudo 6:

$$\theta_z = \arcsin \frac{739.5 - 580.7}{3761.3} = 2.42^\circ \quad (5.13)$$

Finalmente se tiene que el ángulo θ_x es igual a 48.60° , mientras que el modelo de barras supone un ángulo de 41.63° . De ahí la diferencia que se registra en la tracción del tirante T_{5-6} para ambos modelos.

5.1.6 Soluciones alternativas

5.1.6.1 Solución FIB (2002)

A continuación se procede a comparar el modelo de BT con la propuesta de FIB (2002) [21] representada en la Figura V. 10. Comparando ambos modelos se puede observar que son similares. La principal diferencia es cómo se transmite la fuerza vertical aplicada en el nudo 8 que se equilibra en el nudo 5.

En el modelo de BT propuesto en base a la trayectoria de tensiones obtenida del análisis elástico lineal, la carga vertical en el nudo 8 se transmite íntegramente a través del tirante T_{3-8} para después subdividirse por dos caminos hasta llegar al nudo 5 (por un lado directamente a través de la biela C_{3-5} y por otro realizando el recorrido C_{3-6} , T_{2-6} y C_{2-5}).

En la solución propuesta por FIB (2002) esta misma carga vertical para transmitirse al nudo 3 lo hace a través de la estructura que forman los tirantes T_{4-8} , T_{7-8} , T_{3-7} , T_{3-4} y C_{4-7} . A partir de ahí esta carga se transmite hasta el nudo 5 de igual manera que en la solución anterior.

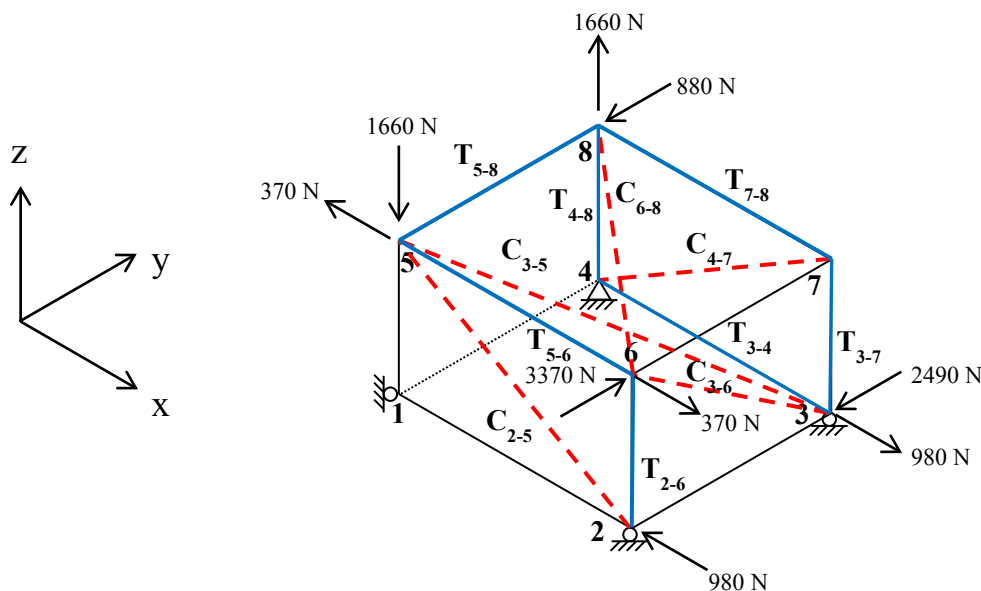
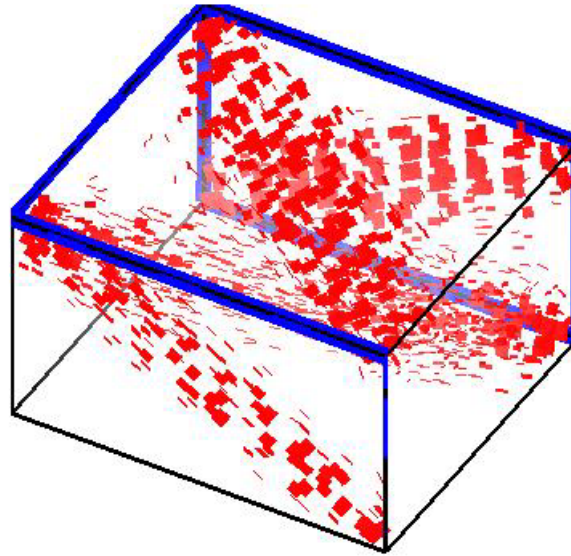
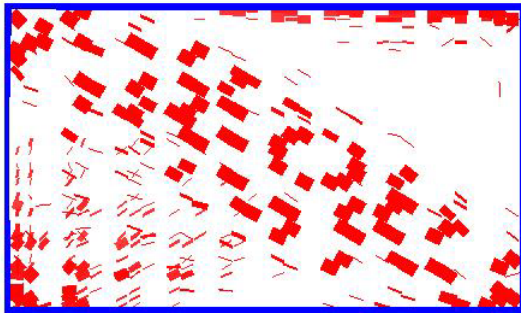


Figura V. 10: Modelo de BT del bloque de anclaje propuesto por el FIB (2002)

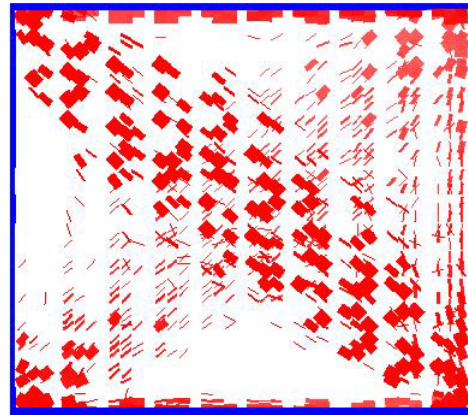
Introduciendo la disposición de armado que propone FIB (2002) se obtiene el campo tensional que se presenta a continuación. Como se puede observar, tras finalizar el cálculo se ha establecido un flujo de compresiones en el hormigón que coincide con las bielas dispuestas en el modelo.



(a) Vista general



(b) Vista alzado posterior. Plano 3478



(c) Vista superior

Figura V. 11: Campo tensional resultante del modelo de FIB

En la Tabla V. 2 se recogen las fuerzas en cada uno de los elementos obtenidas del equilibrio en los nudos de la estructura de barras resultante.

Tirantes			Bielas		
Elemento	Longitud (cm)	Fuerza (N)	Elemento	Longitud (cm)	Fuerza (N)
T ₂₋₆	40.0	580.7	C ₂₋₅	78.5	-1139.1
T ₅₋₆	67.5	3181.2	C ₃₋₅	98.8	-2665.1
T ₅₋₈	60.0	1618.9	C ₃₋₆	72.1	-1046.9
T ₇₋₈	67.5	2800.0	C ₄₋₇	78.5	-3761.3
T ₄₋₈	40.0	1660.0	C ₆₋₈	90.3	-3256.2
T ₃₋₇	40.0	1660.0			
T ₃₋₄	67.5	2800.0			

Tabla V. 2: Relación de fuerzas resultantes en cada uno de los elementos del análisis de la estructura de barras para el modelo propuesto por FIB (2002)

Para evaluar la eficiencia de cada uno de los modelos, siguiendo las recomendaciones de Schlaich et al. (1987) [40], se compara el volumen de armado necesario, que está directamente relacionado con la suma de los productos de la longitud de los tirantes por su fuerza (5.14)(5.15).

Modelo propuesto

$$\sum T_i L_i = 580.7 \times 0.40 + 3171.2 \times 0.675 + 1618.0 \times 0.60 + 3267.8 \times 0.785 = 5908.9 Nm \quad (5.14)$$

Modelo propuesto por FIB

$$\begin{aligned} \sum T_i L_i = 580.7 \times 0.40 + 3171.2 \times 0.675 + 1618.0 \times 0.60 + 2800.0 \times 0.675 + \\ + 1660.0 \times 0.40 + 1660.0 \times 0.40 + 2800.0 \times 0.675 = 8451.6 Nm \end{aligned} \quad (5.15)$$

En base a los valores obtenidos, el volumen de armadura necesario para la configuración propuesta por FIB es un 43% superior. Por lo tanto, el modelo propuesto inicialmente es más óptimo (no sólo desde un punto de vista económico, si no también porque reduce la energía de deformación). Sin embargo, el hecho de que en la solución del FIB todos los tirantes sean paralelos a los paramentos de la estructura simplifica el proceso constructivo. Ambos aspectos deben de ser tenidos en cuenta a la hora del diseño final.

5.1.6.2 Solución generada por eliminación de los tirantes que menos trabajan

En el caso de regiones D muy complejas puede ocurrir que el proyectista tenga dificultades a la hora de definir un modelo de BT que transmita las cargas aplicadas sobre la estructura, incluso disponiendo del flujo de tensiones del análisis elástico lineal. Para estos casos puede resultar muy útil seguir el procedimiento que aquí se explica para generar un modelo de BT, sin tener que analizar inicialmente a fondo la estructura. También da una idea de las posibilidades que ofrece el modelo numérico.

En problemas en los que resulte complicado definir un modelo de BT se recomienda disponer armaduras en todas las posiciones potenciales. El propio programa se encargará de configurar un modelo de BT tras el análisis no lineal y obtener los flujos de compresiones en el hormigón que configurarán las bielas y las tracciones que aparecen en las armaduras. Seguramente, la tensión que aparezca en alguno de los tirantes será muy inferior al resto, señal de que en realidad ese tirante no es necesario. Con esta información inicial se puede proceder a la eliminación de algunos tirantes y volver a analizar la región. Establecer que tirantes son necesarios y cuales no en función de la fuerza a la que están sometidos debe ser decisión del proyectista en última instancia.

Procediendo de este modo para el bloque de anclaje objeto de estudio se han dispuesto armaduras en cada una de las doce aristas. Tras realizar el análisis no lineal del cuerpo, el campo tensional en el hormigón es el que se presenta en la Figura V. 12 (a). A partir de ahí se puede definir el nuevo modelo (Figura V. 12 (b)). En este caso se han eliminado los tirantes T_{1-5} , T_{6-7} y T_{2-3} . En la Figura V. 12 (a), donde el grosor del tirante es proporcional a la tracción, se observa claramente por comparación con el resto que la fuerza a la que están

sometidos estos tres tirantes es inferior al resto. Numéricamente también se comprueba esta menor magnitud de la fuerza en estos tres tirantes (ver Figura V. 13).

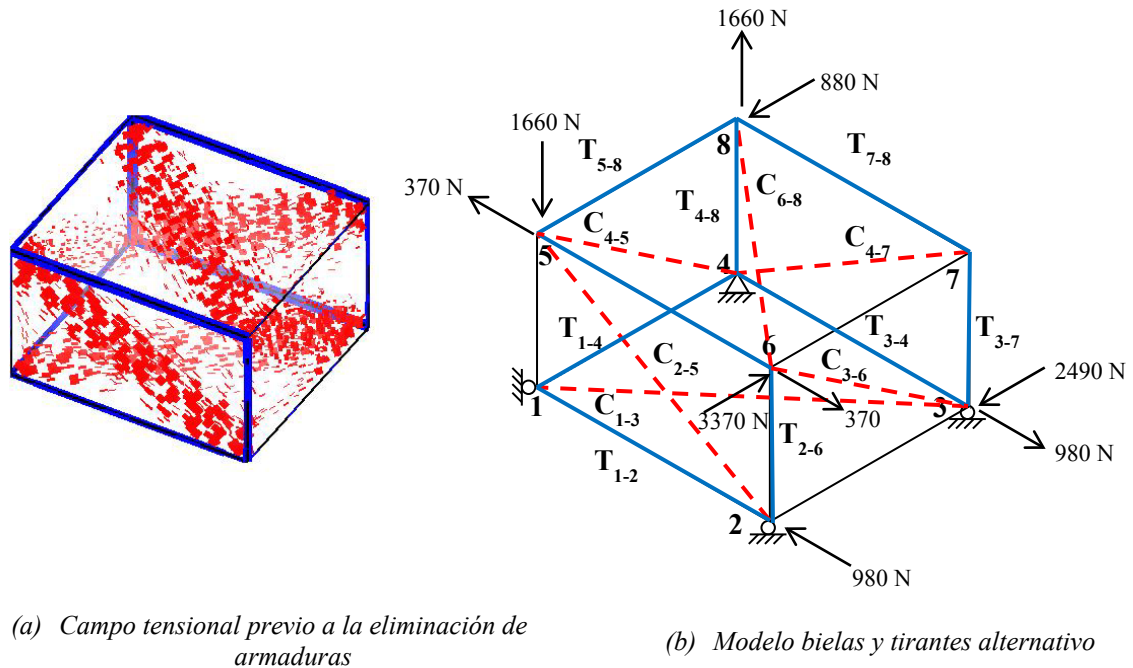


Figura V. 12: Modelo de BT del bloque de anclaje obtenido por eliminación de armaduras

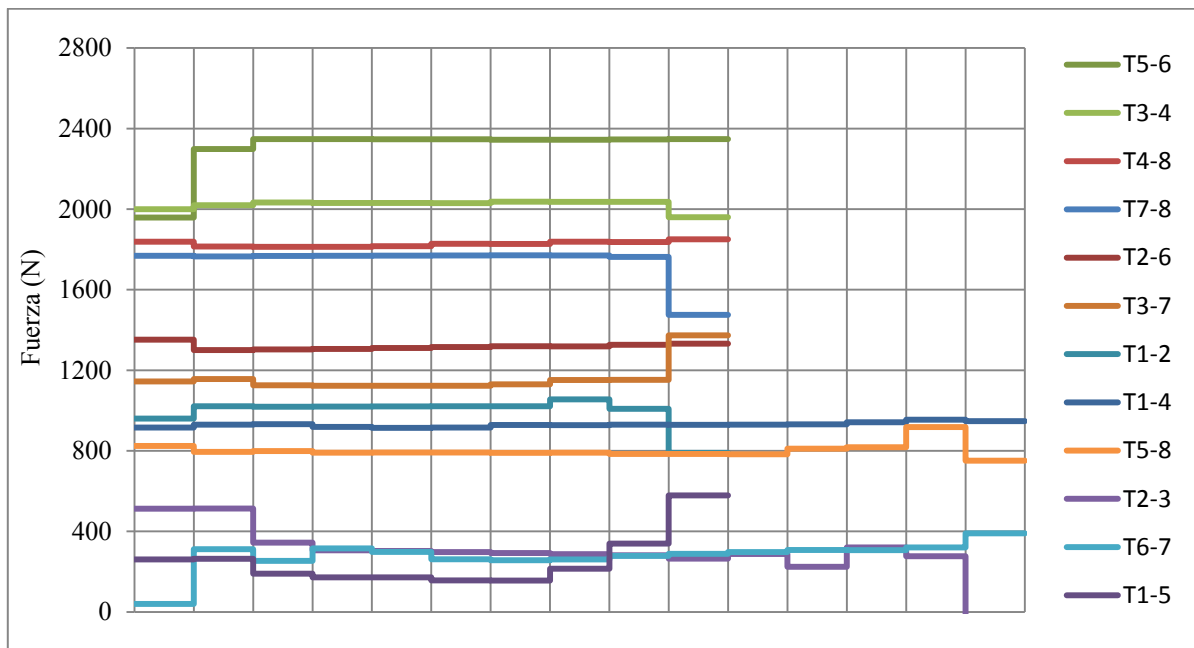


Figura V. 13: Fuerza actuante en cada uno de los elementos que forman los tirantes ¹

¹ No debe despistar al lector que haya cuatro tirantes que se extiendan más que el resto. Cada una de las líneas verticales separa los segmentos en los que quedan divididos los tirantes. Estos cuatro tirantes que se extienden más son precisamente los dispuestos en la dirección Y, que están subdivididos en 15 elementos, mientras que el resto están subdivididos en 10.

Darse cuenta que el nuevo modelo de BT es una estructura estáticamente indeterminada. Si quisiera analizarse se debería o (i) calcular una rigidez equivalente para cada uno de los elementos (difícil de determinar para las bielas de hormigón), (ii) subdividir el sistema en varias estructuras isostáticas o (iii) sustituir aquellos elementos más solicitados por su fuerza de plastificación hasta conseguir una estructura estáticamente determinada. Con el modelo numérico desarrollado en este trabajo final de máster se puede proceder a su análisis directamente sin tener que realizar ninguna de estas simplificaciones.

5.1.7 Comparación de soluciones

En la Tabla V. 3 se comparan las cuatro soluciones propuestas para el bloque de anclaje. Respecto al hormigón se compara la tensión máxima que se registra y el nudo donde se produce. Para el armado se ha calculado la suma del producto de la tracción de los tirantes por su longitud para poder determinar qué soluciones son más óptimas. En lugar de obtener este valor del modelo de la estructura de barras equivalente como se había hecho anteriormente, se ha calculado a partir de cada uno de los segmentos que componen cada tirante en el modelo numérico. Como se ha comentado para las soluciones (3) y (4) ello hubiera supuesto analizar una estructura de barras estáticamente indeterminada. Así todos los datos empleados para el cálculo de $\sum T_i L_i$ proceden de los resultados del modelo numérico.

	$\sigma_{c,max}$	N_{max}	$\sum T_i^e L_i^e$	Diff (%)
Solución inicial propuesta (1)	6.2 MPa	6	5751.1 Nm	-
Solución propuesta FIB (2)	6.4 MPa	6	8218.1 Nm	+43%
Solución armado completo (3)	4.9 MPa	6	7971.2 Nm	+39%
Solución tras eliminación tirantes menos solicitados (4)	5.0 MPa	6	7501.2 Nm	+30%

Tabla V. 3: Comparación soluciones propuestas para bloque de anclaje

La solución que menos solicita al hormigón es la (3) y la que más la (2). El pico de tensión en el hormigón se produce en todos los modelos de BT en el entorno del nudo 6.

En cuanto al armado, la solución que menos volumen requiere es la (1). Esto implica que es la solución óptima ya que minimiza la energía de deformación. No obstante, como ya se comentó, la existencia de un tirante inclinado puede dificultar el proceso constructivo. La solución (4) es la siguiente que presenta un menor volumen de armado y en ella todo el armado es paralelo a los paramentos de la estructura, por lo que no supondría una mayor dificultad constructiva respecto de la solución que propone el FIB (solución 2).

Según los resultados obtenidos, existe un modelo de BT en el que todas las armaduras son paralelas a los paramentos de la estructura y que requiere un menor volumen de armado y, por tanto, más óptima que la solución que propone FIB (2002). La razón por la que FIB propone la solución (2) y no la (4) puede ser porque la solución (4) presenta un modelo de BT estáticamente indeterminado, con las dificultades que ello conlleva. No existe una normativa concreta para el análisis de sistemas internos estáticamente indeterminados y por tanto se

tratan de evitar siempre que sea posible. De ahí la importancia de profundizar más en este tema ya que soluciones hiperestáticas podrían resultar más óptimas que las isostáticas como aquí se demuestra.

Se ha asumido que para todas las configuraciones de armado planteadas la estructura es lo suficientemente dúctil como para que se redistribuyan los esfuerzos.

5.2 Encepado de pilotes

Como se ha comentado en el apartado 2.7.3, la bibliografía existente sobre modelos de BT para regiones D tridimensionales se limita casi exclusivamente al estudio experimental de encepados de pilotes. En este apartado se presentan los resultados obtenidos del análisis con la aplicación del modelo numérico de un encepado de 4 pilotes y se comparan con los resultados experimentales publicados por Suzuki et al. (1998) [46] y los numéricos de Souza et al. (2007) [43] con el programa de análisis no lineal de elementos finitos DIANA. Debido a que no se ha podido acceder al documento original publicado por Suzuki et al., toda la información se ha tomado de Souza et al., donde se hace referencia a los resultados experimentales. Este hecho hace que algunos aspectos del ensayo no estén perfectamente definidos por lo que será necesario suponer parte de la información.

Con el análisis de este encepado de pilotes se pretende demostrar la capacidad del modelo numérico de predecir correctamente la carga de plastificación y última de una región D con un comportamiento tridimensional. Tras el análisis del encepado inicial se realizan algunas variaciones para ver como afectan estos cambios a la solución.

5.2.1 Descripción

Las características del encepado de 4 pilotes estudiado son las siguientes:

Muestra	L (m)	d (m)	e (m)	a=b (m)	f_c (MPa)	f_y (MPa)	A_{sx} A_{sy}
BPC-20-30-1.2	0.80	0.15	0.50	0.30	29.80	413	6 ϕ 10

L = longitud y anchura del encepado

d = canto efectivo

e = distancia entre centros de pilotes

a,b = longitud y anchura del pilar que transmite la carga

f_c = resistencia a compresión del hormigón

f_y = límite elástico del acero

A_{sx} = armadura total dispuesta en la dirección x

A_{sy} = armadura total dispuesta en la dirección y

Se trata de un encepado de planta cuadrada y con armadura dispuesta en banda. Debido a que la geometría no está perfectamente definida por Souza et al., es necesario tomar una serie de suposiciones que son:

- (i) El área de los pilotes es $0.15 \times 0.15 \text{ m}$.
- (ii) La distancia desde el borde del pilote al borde del encepado es de 0.05 m .
- (iii) La disposición de armado considerada ha sido la siguiente:

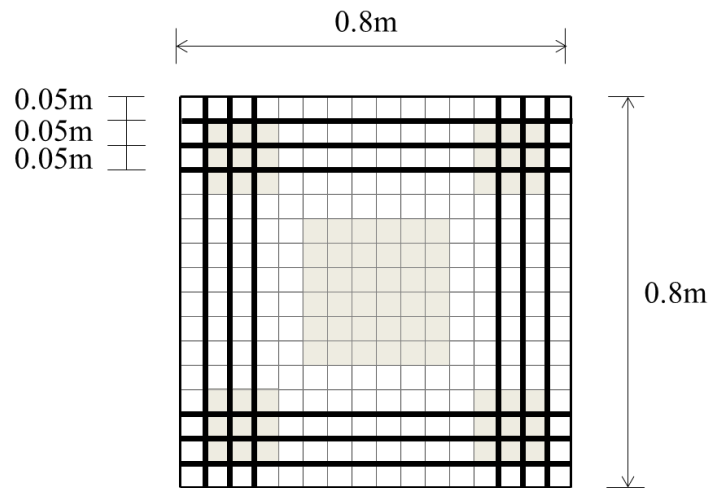


Figura V. 14: Vista en planta de la disposición de armado, y posición de columna y pilotes

donde la separación entre barra y barra es de 5 cm . La superficie del pilar y de los pilotes se puede ver en la imagen superior sombreada.

- (iv) El recubrimiento es igual a 3.75 cm . Sumados al canto efectivo de 0.15 m resulta en un canto total de 0.1875 m .
- (v) Por falta de información no se establece un criterio de rotura por deformaciones excesivas en el hormigón en compresión ni en el acero. Por lo tanto, teóricamente pueden llegar a alcanzarse deformaciones infinitas. Será tras el análisis de los resultados del modelo numérico cuando se determine si las deformaciones máximas registradas son excesivas y, por tanto, si esa carga es superior a la capacidad resistente máxima que se puede estimar para el encepado.

Según la EHE-08 (2008) [19] el encepado de pilotes definido pertenece al grupo de cimentaciones rígidas, ya que el vuelo en la dirección principal de mayor vuelo (12.5 cm) es menor que dos veces el canto ($2 \times 18.75 \text{ cm}$). Según la misma norma, para cimentaciones de tipo rígido, al no ser la distribución de deformaciones lineal a nivel de sección, el método general de análisis más adecuado es el MBT.

5.2.2 Modelización

La separación entre nodos considerada ha sido de 5cm en la dirección X, 5cm en la dirección Y y 3.75cm en la dirección Z. Este mallado genera un total de 7680 elementos finitos tetraédricos (6x16x16x5). Las características mecánicas del hormigón consideradas son 26000MPa el módulo de elasticidad, 0.2 el coeficiente de Poisson del hormigón y 29.8MPa la resistencia a compresión, asumiendo un comportamiento elasto-plástico. Se desprecia la resistencia a tracción del hormigón. No se impone ningún criterio de rotura para el hormigón basado en deformaciones máximas admisibles.

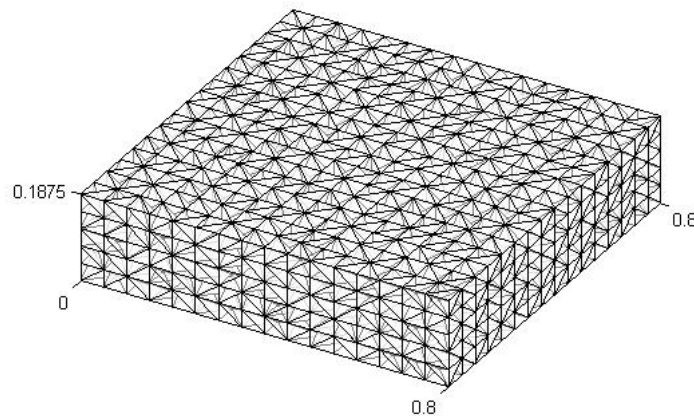


Figura V. 15: Discretización con elementos finitos del encepado de cuatro pilotes de hormigón

192 elementos finitos modelizan las 12 armaduras dispuestas, siendo la longitud de cada uno de estos elementos finitos igual a 5 cm. Se considera un módulo de elasticidad para el acero de 200000 MPa y un límite elástico de 413 MPa. No se impone ningún criterio de rotura para las armaduras basado en deformaciones máximas admisibles.

En cuanto a las condiciones de contorno se restringe el desplazamiento vertical de todos los nodos que pertenezcan a la superficie de contacto pilote-losa. En total son 64 nodos (16 por pilote). Adicionalmente, para que el sistema sea estáticamente determinado se restringen los dos desplazamientos horizontales en uno de los 64 nodos y un desplazamiento horizontal adicional en otro.

5.2.3 Campo tensional resultante

Una vez definida la disposición de armado, el modelo numérico genera automáticamente el campo tensional. Las tensiones de compresión en el hormigón están representadas por trazos de color rojo que definen la dirección de la tensión principal y cuyo grosor depende del valor de la tensión (mayor valor, mayor espesor). Los tirantes están representados por líneas continuas de color azul, cuyo grosor es directamente proporcional a la tracción que deben resistir.

De las trayectorias de compresiones que se forman en el encepado se distinguen cuatro bielas diagonales que partiendo del centro acaban en los pilotes. La componente vertical de las bielas es absorbida por la reacción en los pilotes y la componente horizontal por la armadura.

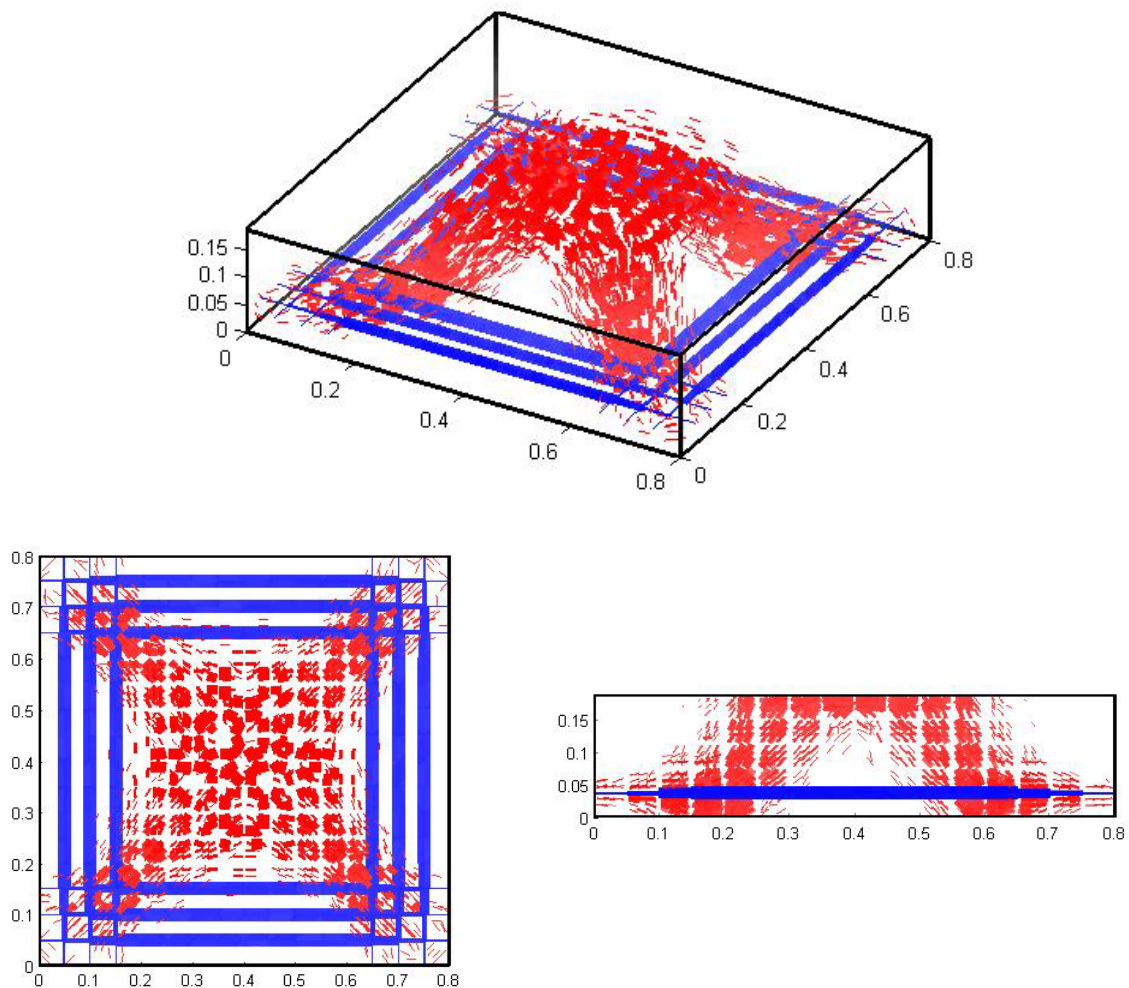


Figura V. 16: Campo tensional generado por la herramienta informática

5.2.4 Análisis de los resultados obtenidos

A continuación se presentan algunos de los resultados obtenidos del modelo numérico.

5.2.4.1 Deformaciones

Como se comentó en el apartado 2.7.3.1, el método de cálculo de encepados que tradicionalmente se ha empleado asume una ley plana de deformaciones. Sin embargo Adebar et al. (1990) [5] demostraron experimentalmente que esta hipótesis es incorrecta.

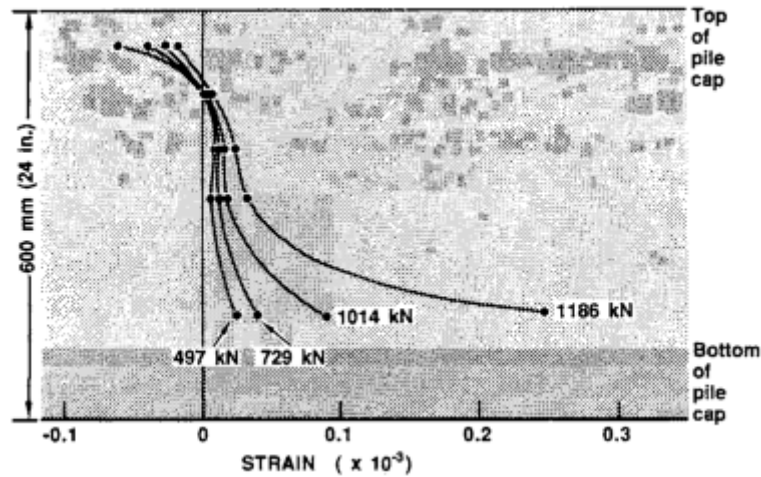


Figura V. 17. Deformaciones longitudinales medidas para varios estados de carga [5]

Se procede a continuación a estudiar las deformaciones longitudinales que aparecen en el encepado para ver si efectivamente suponer una ley plana de deformaciones es incorrecto. En la Figura V. 18 se representa gráficamente la ley de deformaciones ϵ_x para el plano de corte $X=0.40$ m (que coincide con el centro del encepado) obtenidas del modelo numérico para una carga actuante de 320kN. Como puede observarse claramente suponer una ley plana de deformaciones en la anchura Y no sería adecuado, ya que las deformaciones en la parte central del ancho son mucho mayores.

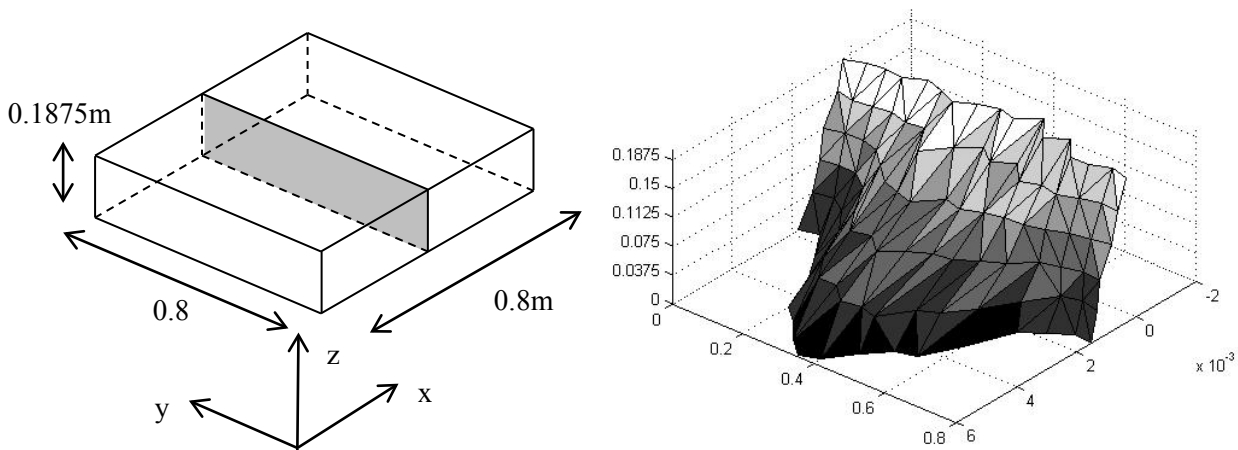


Figura V. 18: Representación gráfica 3D de la deformación ϵ_x en el plano de corte $X=0.4m$ ($P=320kN$)

En la Figura V. 19 se representa la variación de la deformación ϵ_x en el mismo plano de corte $X=0.40m$ pero de manera separada para cada una de las fibras $y=cte$. Para hacer el gráfico más legible únicamente se representan las deformaciones para las fibras $y=0.00m, 0.10m, 0.20m, 0.30m, 0.40m$, de diferentes colores tal y como queda definido en la imagen inferior izquierda. Como existe simetría, las fibras $y=0.50m, 0.60m, 0.70m, 0.80m$, son iguales a las representadas.

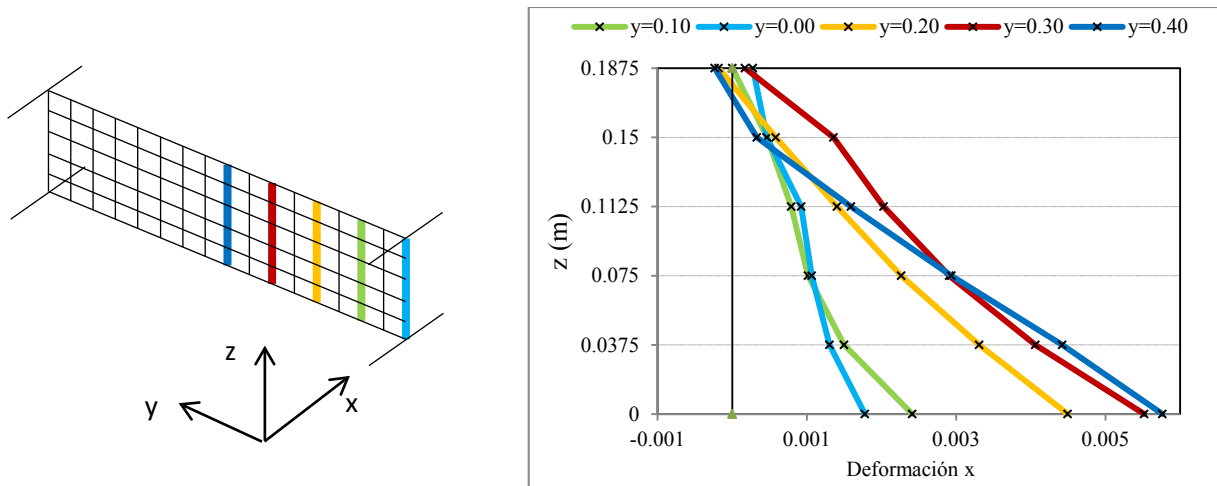


Figura V. 19: Variación de la deformación ε_x para distintas fibras en el plano $X=0.4m$ ($P=320kN$)

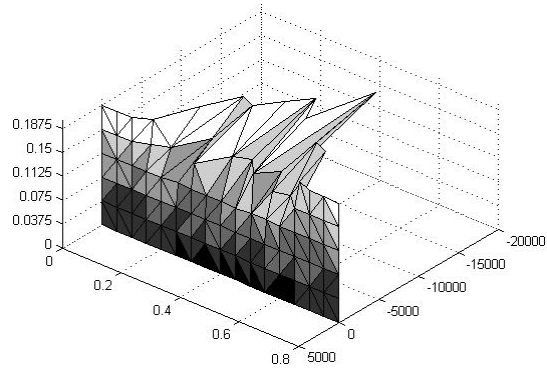
En base a los resultados representados, aunque las deformaciones no definen líneas rectas perfectas, sí que parece razonable asumir que la variación de la deformación con el canto es aproximadamente lineal. Esto va en contra de los resultados experimentales de Adebar et al. (1990) [5]. La razón puede encontrarse en que los encepados que estos autores estudiaron tienen una mayor relación canto distancia entre pilotes, lo que hace que se asemeje más a una viga de gran canto. Para el caso aquí estudiado, con un canto de 0.1875m y una distancia entre pilotes de 0.50m, esta relación está todavía lejos del valor que establece el límite para las vigas de gran canto.

Como existe doble simetría, el comportamiento en la dirección X e Y será idéntico (salvo pequeños errores numéricos), y lo mencionado para la dirección X es extrapolable a la dirección Y.

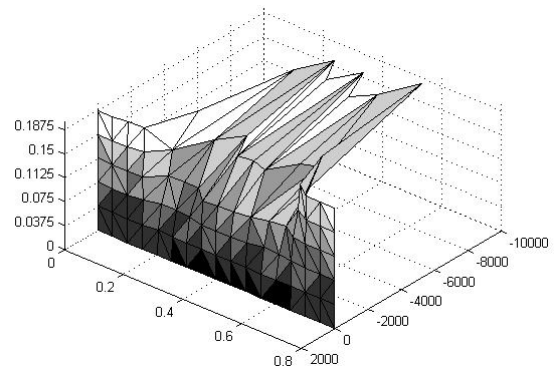
5.2.4.2 Tensiones

En la Figura V. 20 se representa el campo de tensiones σ_x para distintos planos de corte $X=cte$ para una carga de 320kN. Distribuciones iguales se obtendrían para σ_y con planos de corte $Y=cte$.

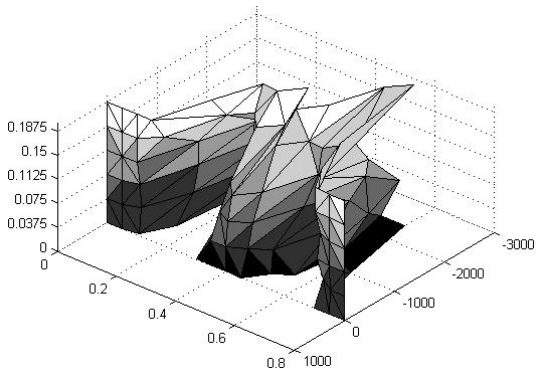
Para el plano de corte $X=0.40m$, que corresponde con el eje central del encepado, la profundidad de la fibra neutra es pequeña y se producen tensiones elevadas ($\approx 12MPa$) que se concentran en la parte central de la anchura. Conforme los planos de corte se aproximan a los pilotes las tensiones van disminuyendo ya que como se observa en la Figura V. 16 la biela inclinada va aumentando sus dimensiones. Cuando llega al plano de corte $X=0.20m$, que corresponde con el inicio de la superficie de apoyo, prácticamente todas las tensiones longitudinales están en el nivel inferior para ser absorbidas por los pilotes. Darse cuenta como la tensión va disminuyendo para los diferentes planos de corte $X=0.20m$, $X=0.15m$, $X=0.10m$ y $X=0.05m$ que coinciden con la localización de los pilotes. Al llegar a $X=0.00m$ todavía quedan algunas tensiones pero ya mucho más pequeñas que se compensan con la tensión residual en el extremo de las armaduras.



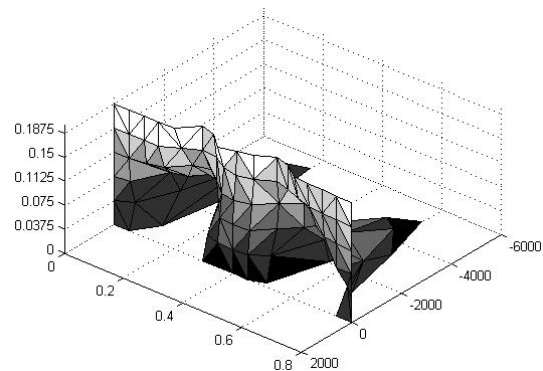
(a) $X=0.40m$



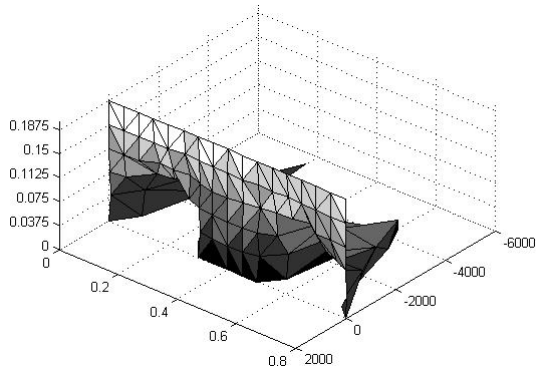
(b) $X=0.35m \equiv X=0.45m$



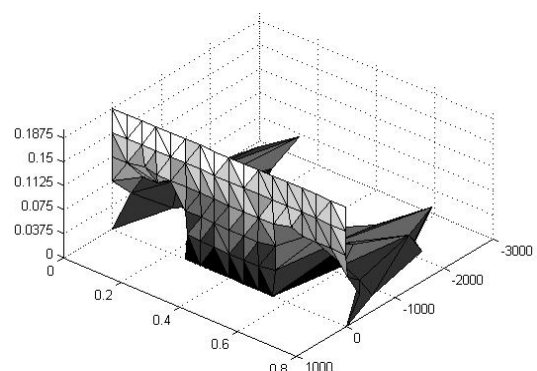
(c) $X=0.25m \equiv X=0.55m$



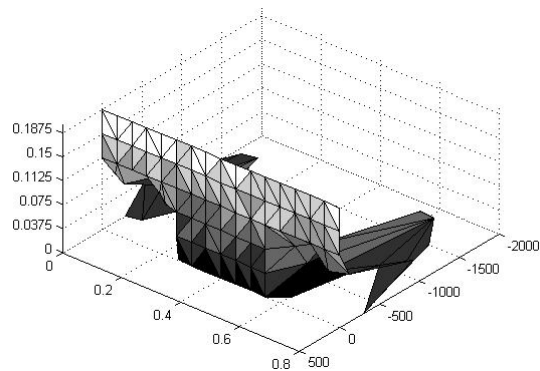
(d) $X=0.20m \equiv X=0.60m$



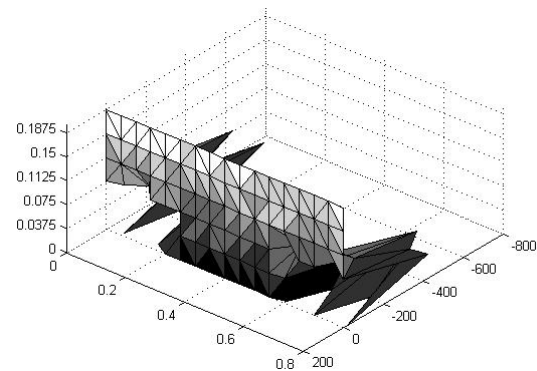
(e) $X=0.15m \equiv X=0.65m$



(f) $X=0.10m \equiv X=0.70m$



(g) $X=0.05m \equiv X=0.75m$



(h) $X=0.00m \equiv X=0.80m$

Figura V. 20: Tensión σ_x para distintos planos de corte $X=cte$. (Unidades m. y KPa)

5.2.4.3.2 Comparación de resultados

En la Tabla V. 5 se comparan las cargas de plastificación y últimas según Suzuki et al., Souza et al. y las obtenidas con el modelo numérico desarrollado. El modelo numérico propuesto predice bien las cargas de plastificación y última obtenidas experimentalmente. De hecho los resultados son mejores que los obtenidos por Souza et al.

	$N_{\text{experimental}}$ (Suzuki et al.)	$N_{\text{numérico}}$ (Souza et al.)	$\frac{N_{\text{exp}}}{N_{\text{num}}}$	$N_{\text{numérico}}$ (modelo)	$\frac{N_{\text{exp}}}{N_{\text{num}}}$
Carga plastificación F_y (kN)	490	312.0	1.57	490	1.00
Carga última F_u (kN)	490.75	379.6	1.29	450-505	1.09-0.97

Tabla V. 5: Comparación de los resultados experimentales obtenidos por Suzuki et al. (1998), los numéricos de Souza et al. (2007) y los numéricos del modelo numérico desarrollado

En la Figura V. 22 se representa gráficamente la curva-carga desplazamiento obtenida mediante el modelo numérico comparada con las cargas de plastificación y últimas de los otros dos autores.

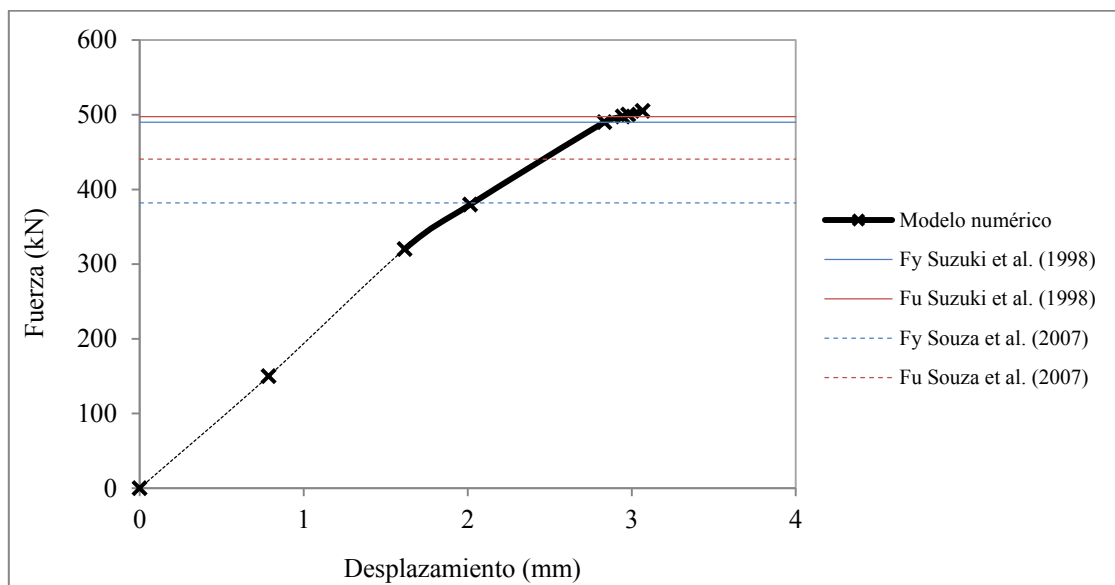


Figura V. 22: Curva carga-desplazamiento obtenida del modelo numérico vs. carga de plastificación y última de Suzuki et al. (1998) y Souza et al. (2007)

5.2.4.3.3 Discusión de los resultados

A continuación se representa gráficamente la tensión en las armaduras para niveles de carga de 379.6kN (carga última según Souza et al.), 490kN (carga de plastificación según Suzuki et al.), 497.5kN (carga última según Suzuki et al) y 510kN (carga próxima al máximo impuesto, que aunque supera a la última predicha es estáticamente admisible). En las gráficas se ha superpuesto una línea horizontal a trazos que representa la tensión de plastificación de la armadura (413). Como el sistema es simétrico respecto de dos ejes, será suficiente con representar las deformaciones de tres armaduras de una de las bandas.

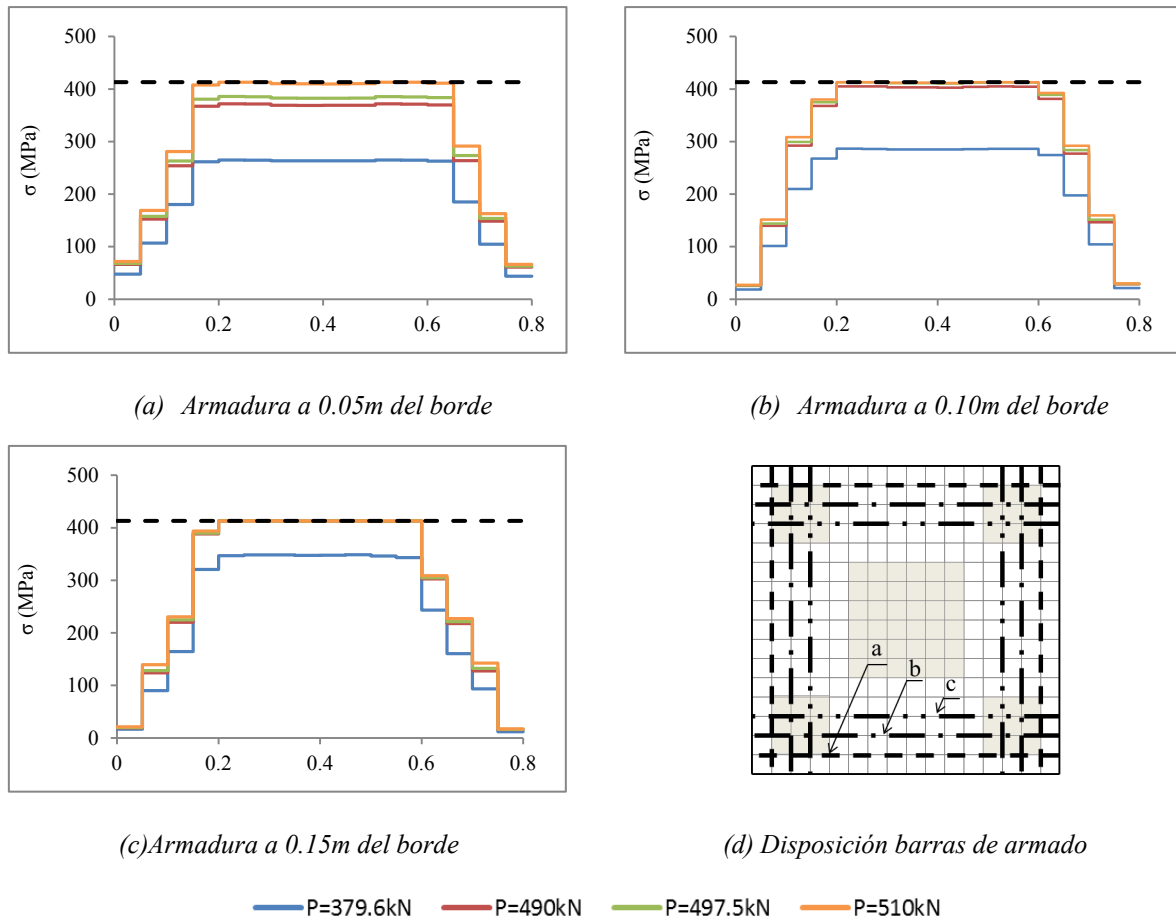


Figura V. 23: Tensión armaduras

Para una carga de 379.6kN, según Souza et al. se alcanza la carga última del encepado. Sin embargo según el modelo numérico propuesto ninguna de las armaduras habría plastificado para ese nivel de carga. Para este nivel de carga la deformación de compresión máxima que se alcanza en el hormigón es del 4.1 %, que no supera las deformaciones últimas habituales en el hormigón.

Según los resultados experimentales la carga de plastificación es igual a 490kN. Este valor es prácticamente el mismo que el que se deduce de la curva carga-desplazamiento representada en la Figura V. 22. El modelo numérico predice que para este nivel de carga la armadura situada a 0.15 m del borde ya habrá plastificado y la situada a 0.10m del borde plastificará aproximadamente para esa carga. Esta plastificación de 8 de las 12 armaduras provoca el cambio de pendiente en la curva carga-desplazamiento y coincide con los resultados experimentales. Para este nivel de carga la deformación de compresión máxima alcanzada en el hormigón es del 6.4 %. A falta de más datos, es posible que esta deformación exceda la deformación última admisible del hormigón, en cuyo caso la rotura del encepado se produciría por rotura del hormigón antes de alcanzar la carga de plastificación.

Dejando fuera de consideración las deformaciones del hormigón, según el modelo numérico es posible seguir incrementando la carga por encima de los 497kN estimados experimentalmente como carga última. La carga máxima admisible con un residuo que pueda

ser despreciable es 515kN. No obstante, para una carga de 515kN la deformación máxima del hormigón es del 10.6 ‰, lo que no parece admisible para un hormigón de 30MPa.

Para cargas mayores de 515kN no es posible alcanzar el equilibrio. La explicación puede encontrarse en que las armaduras han agotado su capacidad resistente y por lo tanto aunque el hormigón pueda aguantar más las armaduras no son capaces de equilibrar esas fuerzas.

5.2.4.4 Comparación con la EHE-08

Según la EHE-08 [19], en el caso de encepados de cuatro pilotes con el pilar situado en el centro del cuadrado, la tracción correspondiente a cada banda puede obtenerse a partir de la siguiente expresión:

$$T_{1d} = \frac{N_d}{0.85d} (0.50l_1 - 0.25a_1) = A_s f_{yd} \quad (5.16)$$

donde N_d es el axil de cálculo del pilote más cargado, d es el canto útil del encepado, l_1 la distancia entre los ejes de los pilotes, a_1 la anchura de la columna. Sustituyendo por los valores del encepado descrito anteriormente y multiplicando por cuatro para obtener el axil de cálculo del encepado (todos los pilotes se llevan la misma carga) se obtiene:

$$4N_d = 4 \frac{A_s f_{yd} 0.85d}{0.50l_1 - 0.25a_1} = 4 \frac{3 \cdot \pi 10^2 / 4 \cdot 400 \cdot 0.85 \cdot 0.15}{0.50 \cdot 0.55 - 0.25 \cdot 0.3} = 240332N = 240.3kN \quad (5.17)$$

La carga última estimada por la EHE-08 es un 52% inferior a la obtenida experimentalmente y predicha por el modelo numérico.

5.2.4.5 Comentarios adicionales

La deformación de los tramos de armadura plastificados obtenida del modelo numérico no se puede tomar como un valor válido ya que al ser la rigidez tangente de estos tramos prácticamente nula un pequeño residuo provocará un desplazamiento considerable que distorsiona las deformaciones que se producen en los tramos plastificados. Sin embargo, esta deformación se puede obtener indirectamente de manera aproximada a partir de los elementos finitos de hormigón, ya que al considerar adherencia perfecta, la deformación en los nodos compartidos por armadura y hormigón debe ser la misma. A continuación se representa en la Figura V. 24 la deformación del hormigón ϵ_x en un plano de corte $Y=0.15m$ (que corresponde precisamente con la posición de la armadura más interna) para distintos valores de x . Queda claro que ϵ_x a la altura de 0.0375m (que es donde está localizada la armadura) es mayor para posiciones cercanas a centro luz ($x=0.40m$) y va disminuyendo conforme se acerca a los pilotes.

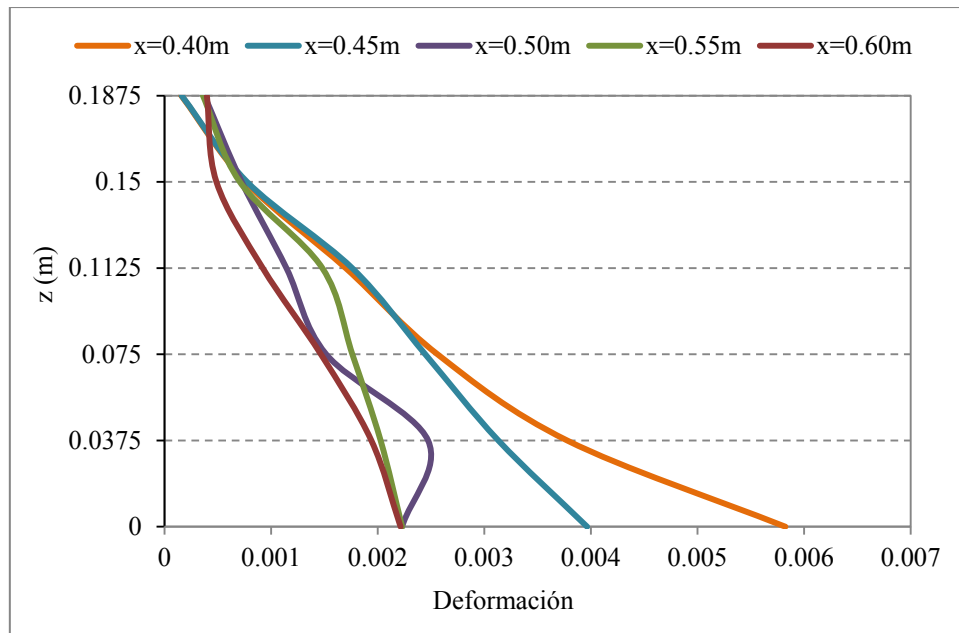


Figura V. 24: Variación de la deformación ϵ_x para distintas fibras para $Y=0.15\text{m}$

La validez de los resultados obtenidos no se puede extender a toda la curva obtenida. En la realidad esta curva debe estar caracterizada por un tramo inicial de una rigidez muy superior al resto, que corresponde al estado en el que el hormigón todavía no ha fisurado. Sin embargo, como el modelo numérico desprecia la resistencia a tracción del hormigón, este tramo no aparece. Sería necesario modificar la ecuación constitutiva del hormigón en tracción y considerar la resistencia a tracción del mismo hasta que se alcanza la fisuración. No obstante no hay que olvidar que el MBT es de aplicación para el dimensionamiento en estado límite último y por lo tanto lo que interesa es poder obtener la carga última que resistiría la estructura. Como bien demuestran los resultados obtenidos del encepado analizado, el modelo numérico predice con exactitud la carga última.

5.2.5 Soluciones alternativas

A continuación se realizan algunas variaciones sobre el encepado original para analizar cómo afecta a los resultados.

5.2.5.1 Comportamiento elástico lineal del hormigón en compresión

En los resultados presentados anteriormente se ha asumido un comportamiento del hormigón en compresión elasto-plástico. A continuación se comparan las curvas carga-desplazamiento obtenidas asumiendo un comportamiento elástico y un comportamiento elasto-plástico. En esta ocasión no se impone ningún criterio de rotura por deformaciones para ninguno de los dos comportamientos.

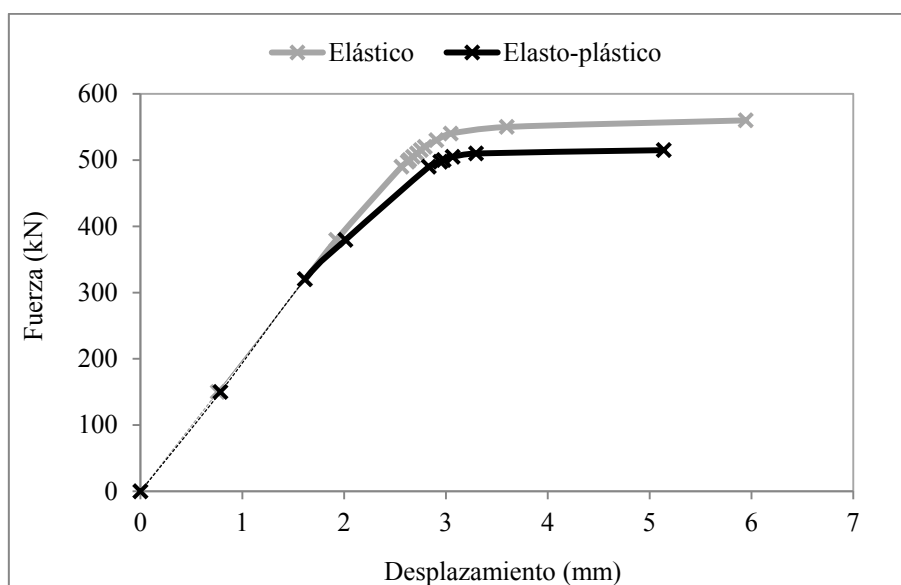


Figura V. 25: Curva fuerza-desplazamiento obtenida del modelo numérico para comportamiento del hormigón en compresión elástico lineal y elasto-plástico

Los resultados obtenidos muestran que la capacidad resistente sólo aumenta un 8%, ya que la máxima carga está limitada por la máxima fuerza admisible en las armaduras. La variación que se registra se puede deber a que cambia ligeramente el ángulo de incidencia de las bielas sobre los tirantes y por lo tanto la sollicitación de los mismos para una misma carga.

A continuación se analizan por separado las respuestas de ambos encepados:

- Comportamiento elasto-plástico:

La tensión máxima de compresión en el hormigón está limitada 29.80MPa. Por tanto, una vez alcanzada esa tensión en un elemento finito, aunque puede seguir deformándose no admite más carga y el exceso de carga debe fluir hacia otros elementos finitos con reserva de capacidad resistente. A continuación se muestran señaladas en rojo aquellas zonas del encepado que han alcanzado el límite elástico del hormigón y han plastificado para cargas de 320 kN, 450kN y 500 kN.

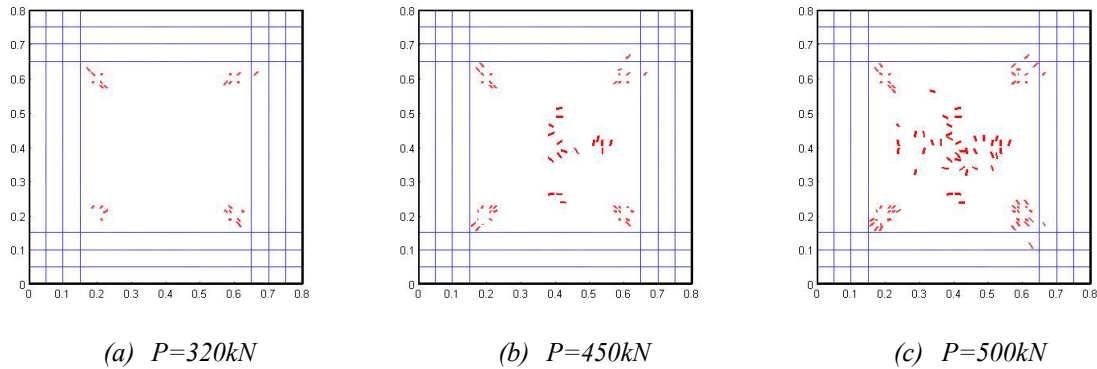


Figura V. 26: Vista en planta de las zonas plastificadas para el modelo elasto-plástico para diferentes cargas

La distribución de esfuerzos hacia los elementos finitos menos solicitados está limitada por el hecho de que las cargas tienen que fluir a lo largo de la estructura para acabar en los pilotes. No se va a poder transmitir carga a elementos finitos que no vayan a ser capaces de llevarla hasta los apoyos por su localización.

- Comportamiento elástico:

Al no existir límite de resistencia para el hormigón, los elementos finitos pueden llegar a resistir teóricamente una carga infinita. Sin embargo la fuerza máxima admisible por las armaduras limita la carga última a 560kN. Para esta carga se registra una tensión máxima de 150 MPa y una deformación máxima del acero igual al 14%.

5.2.5.2 Encepado con armado y pilotes dispuestos en cruz

A continuación se plantea realizar un cambio en la disposición de los pilotes en planta y del armado. En la nueva configuración los pilotes están localizados formando un rombo, cuyos vértices están definidos por los puntos medios de las aristas de la losa del encepado. La armadura total dispuesta es la misma (6 $\phi 10$ en cada una de las direcciones), pero colocada en cruz tal y como se indica en la Figura V. 27(a).

En la Figura V. 27 se representan algunas vistas del campo tensional generado por la herramienta informática para esta disposición de armado.

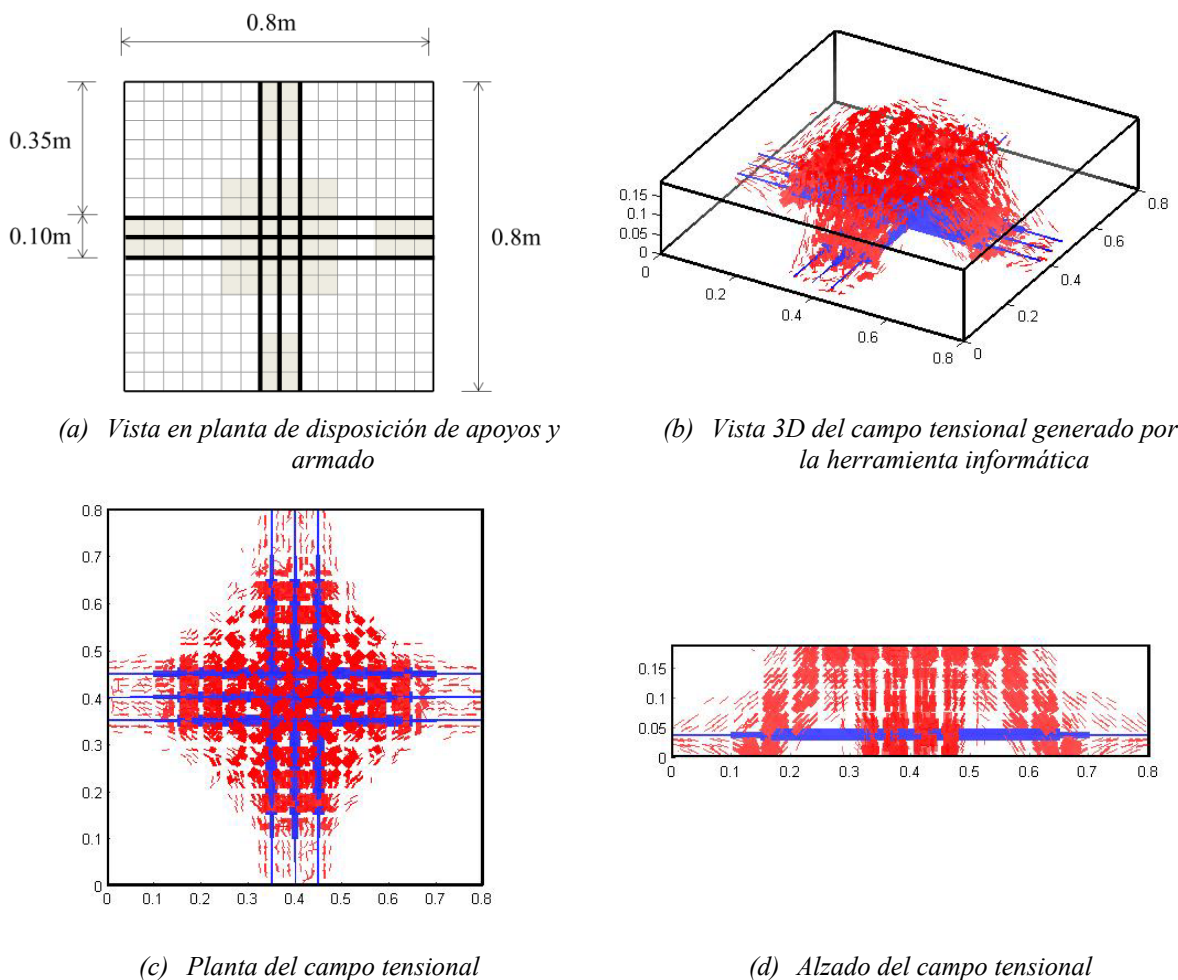


Figura V. 27: Encepado con armado y pilotes dispuestos en cruz

La principal diferencia entre los dos modelos de BT es el número de tirantes. Mientras que en la configuración antigua se disponían cuatro, en la nueva únicamente hay dos. En la siguiente figura se representa de manera simplificada estos dos modelos.

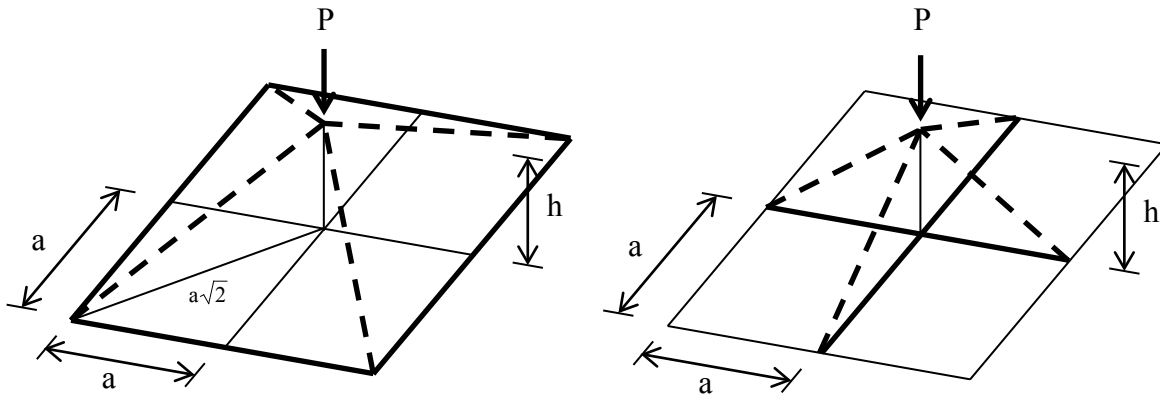


Figura V. 28: Esquema bielas y tirantes con distribución de armadura en banda y en cruz

Aproximadamente ya que los modelos representados arriba son simplificaciones de la realidad, según (5.18) la fuerza que deben soportar los tirantes en los dos modelos de BT es la misma. No obstante, darse cuenta que para un mismo volumen total de armadura, el área de los tirantes en la configuración en cruz será el doble que en la configuración en banda ya que únicamente hay dos tirantes. Por lo tanto, la carga última será aproximadamente el doble. De hecho, si se comparan las curvas carga-desplazamientos (Figura V. 29) se observa que la carga última que puede llegar a alcanzarse con esta segunda configuración aumenta de 505kN a aproximadamente 900kN ($\epsilon_{c,max,900kN}=6.3\%$).

$$\frac{T_{banda}}{T_{cruz}} = \frac{P/4 \frac{a\sqrt{2}}{h} \frac{\sqrt{2}}{2}}{P/4 \frac{a}{h}} = 1 \quad (5.18)$$

También se logran reducir los desplazamientos ya que con el armado en cruz se rigidiza la zona central. Pero no todo son ventajas, ya que el nuevo encepado es menos dúctil como se observa en la Figura V. 29.

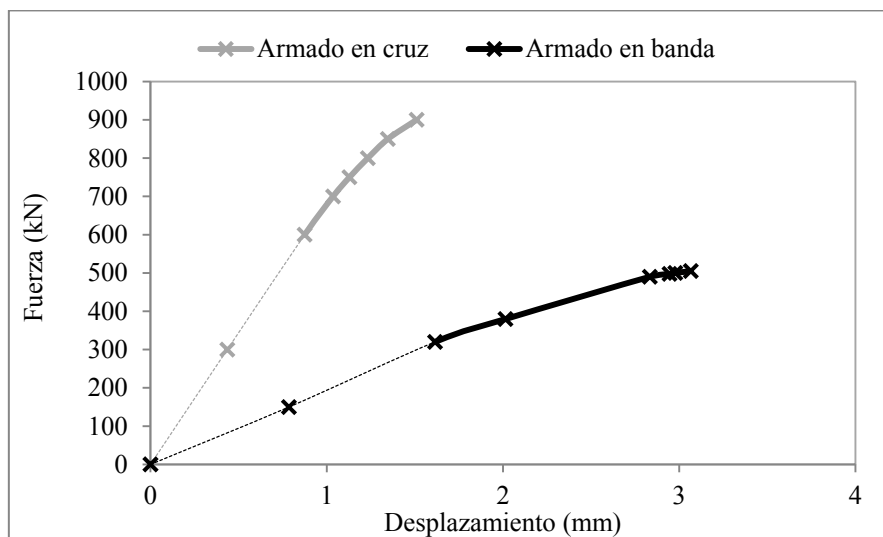


Figura V. 29: Curva fuerza-desplazamiento obtenida del modelo numérico para encepado con armado en banda y encepado con armado en cruz con misma cuantía de armadura total

5.2.5.3 Reducción de la superficie de la columna

El área de la columna a través de la cual se aplica la carga sobre el encepado también tiene influencia en el comportamiento del mismo. Se propone reducir este área de 30x30cm a 20x20cm. La curva fuerza-desplazamiento para ambos casos se representa en la Figura V. 30

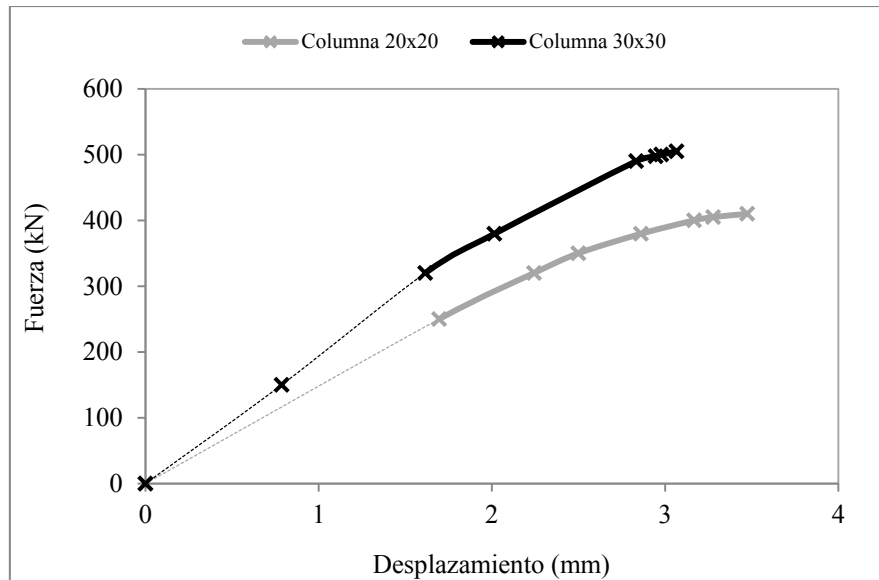


Figura V. 30 Curva fuerza-desplazamiento obtenida del modelo numérico para encepado con área de columna 30x30cm y 20x20cm

La carga máxima disminuye de 505 kN a 410 kN (-18.8%). También cambia la zona de fallo y mientras que con una superficie de 30x30cm la deformación máxima del hormigón que previsiblemente produciría la rotura se da en la zona de apoyo sobre los pilotes, para una superficie de 20x20cm la deformación máxima se da en la zona bajo la aplicación de la carga. Esta reducción es del mismo orden que los resultados experimentales obtenidos por Suzuki et al. (1998) [46] donde para un pilote de 80x80x25cm reducir el área de la columna de 30x30cm a 25x25cm supuso una reducción de la resistencia última del pilote de -16.6%.

6 Conclusiones y futuras líneas de investigación

6.1 Conclusiones

Las principales conclusiones derivadas del análisis de la revisión bibliográfica realizada son:

- A pesar de que el MBT está muy extendido para el proyecto de regiones D bidimensionales, hay muy pocas directrices para su aplicación a modelos 3D.
- La flexibilidad del MBT al estar basado en el teorema del límite inferior de la plasticidad puede llegar a ser un problema para el proyectista, sobre todo para sistemas complejos. El uso de programas informáticos que automáticamente generan un modelo de BT a partir de la configuración de armado puede resultar de gran ayuda.
- No se han desarrollado herramientas informáticas para el análisis de regiones D tridimensionales. Únicamente existen algunos modelos teóricos de elementos finitos que generan automáticamente el modelo de BT aplicando técnicas de optimización topológica.

Las principales conclusiones obtenidas tras la implementación del modelo numérico en MATLAB y el estudio de algunos ejemplos son:

- El modelo numérico es capaz de generar el campo tensional que se produce en la región D tridimensional a partir de la configuración de armado proporcionada por el proyectista. Los flujos principales de compresiones son coherentes con las bielas que se forman en el modelo de barras equivalente. Por lo tanto no es necesario que el proyectista defina completamente la geometría completa del modelo de BT. En aquellas situaciones en las que el proyectista no tenga una configuración de armado definida, puede optar por disponer armadura en las diferentes zonas posibles y será el propio programa el que identificará qué armaduras son necesarias y cuáles no.
- El modelo numérico es capaz de predecir bien la carga última y de plastificación de regiones D tridimensionales como demuestran los resultados obtenidos para el encepado estudiado.
- Para una misma región D modelos de BT hiperestáticos pueden ser más eficientes que modelos isostáticos. Aunque existen algunas recomendaciones sobre cómo tratar los modelos hiperestáticos, en la mayoría de las ocasiones se recomienda que sean isostáticos. Con el modelo numérico desarrollado el análisis de modelos hiperestáticos no representa un problema, por lo que sí se pueden considerar soluciones de ese tipo.
- Se requieren muchos elementos finitos para obtener una respuesta adecuada de la región D tridimensional modelizada. El tetraedro de cuatro nodos es un elemento finito habitual en la modelización de sólidos tridimensionales por su sencillez. Sin embargo como es un elemento finito de deformación constante para captar la variación de tensiones que se produce en el sólido es necesario disponer muchos, lo que ralentiza el proceso de cálculo.
- Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales necesitan de algoritmos adicionales para garantizar la convergencia. La fisuración que se produce en el hormigón por la aparición de tracciones provoca cambios bruscos en la rigidez de las estructuras de hormigón que para sistemas complejos como es un sólido tridimensional hace que se generen muchos problemas para alcanzar la solución de equilibrio. Para resolver este problema en el modelo numérico presentado se propone utilizar una estrategia de convergencia global para garantizar la obtención de una solución de equilibrio con la aplicación del método de Newton-Raphson. Se le conoce como método globalmente convergente y de forma simplificada se puede decir que disminuye progresivamente el incremento de desplazamientos obtenido por Newton-Raphson hasta encontrar una solución que mejore la anterior.
- La aplicación de cargas puntuales (externas, reacciones o fuerzas internas por tensión residual en los extremos de las armaduras) puede generar problemas de convergencia. Es necesario profundizar más en este tema ya que esto impide que se alcance una solución equilibrada en determinadas circunstancias.

- Para el encepado de pilotes analizado según la configuración del ensayo experimental de Suzuki et al. (1998) [46], asumiendo valores de deformación última para el hormigón entre 5‰ y 7‰, la ductilidad es muy escasa. Esto es debido a que la plastificación del acero se produce para deformaciones elevadas en el hormigón, por lo que la reserva de deformación en la rama plástica de algunos elementos finitos está prácticamente agotada. De hecho, si se asume una deformación última del hormigón del 5‰ la rotura se produce previa a la plastificación de la armadura.
- Los encepados de pilotes con disposición de armado y pilotes en cruz tiene una mayor capacidad resistente que los encepados con armadura en banda y planta rectangular, pero la ductilidad es menor.
- Disminuir la superficie de aplicación de la carga en un encepado de pilotes supone una disminución de la carga de plastificación y última.

6.2 Futuras líneas de investigación

A la vista de los resultados y conclusiones obtenidos se proponen las siguientes líneas de trabajo futuro en lo que se refiere al MBT:

- Estudiar las zonas nodales tridimensionales y definir directrices para comprobar su capacidad resistente.
- Obtener recomendaciones prácticas y métodos simplificados de diseño para regiones D tridimensionales.
- Profundizar en el estudio de modelos de BT hiperestáticos, que en algunas ocasiones pueden ser más óptimos que los isostáticos.
- Aplicar el MBT para diseño sísmico. Las directrices existentes se basan en cargas monotónicas, por lo que para su aplicación a cargas cíclicas es necesario investigar más.

En cuanto a las mejoras que se pueden realizar sobre el modelo numérico implementado en MATLAB con el objetivo final de desarrollar un programa para el análisis de regiones D tridimensionales se propone:

- Sustituir el tetraedro de cuatro nodos por el de diez nodos. Tiene la misma flexibilidad para adaptarse a geometrías complejas, pero permite mayor precisión con un menor número de grados de libertad. Esto se traduce en una reducción del tiempo de cálculo necesario.
- Estudiar la implementación de geometrías más complejas como pueden ser los diafragmas de unión en puentes segmentados.
- Representar la armadura mediante un modelo embebido, lo que permitiría que el mallado del hormigón fuera independiente de la posición de las armaduras.

- Permitir un tamaño de malla diferente para cada zona de la región D. De esta manera se podría disponer una malla más pequeña en aquellas zonas donde se produzcan variaciones más importantes y en el resto utilizar un mallado mayor, con la consiguiente disminución de elementos finitos totales y la aceleración del proceso de cálculo.
- Para cada elemento finito de hormigón considerar la influencia que tiene sobre el comportamiento en una de las direcciones principales las deformaciones en las otros dos. En el estado actual la ley constitutiva del hormigón está basada en un comportamiento uniaxial. Por lo tanto no permite considerar efectos como el confinamiento.
- Modelizar la adherencia hormigón-acero.
- Disminuir el tiempo de cálculo necesario proponiendo una numeración de los nodos más óptima que permita una resolución del sistema de ecuaciones más eficiente y una estrategia de convergencia global que permita la obtención de una solución de equilibrio más rápidamente.
- Calibrar el modelo numérico mediante resultados experimentales obtenidos de la bibliografía y del proyecto que el grupo de investigación ha presentado como continuación del proyecto BIA2009-11369.
- Proponer elementos de distribución de cargas puntuales para evitar residuos excesivos. Estas cargas puntuales pueden ser provocadas tanto por una acción exterior, una reacción o incluso internamente por la fuerza actuante en un extremo de una armadura

7 Bibliografía

- [1] ACHE Comisión 1 GT1/3 (2003). *El método de las bielas y tirantes*. Monografía M-6, Ed. ACHE
- [2] ACI 318-11 (2011). *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*. ACI Committee 318, American Concrete Institute.
- [3] ACI SP-208 (2002). *Examples for the Design of Structural Concrete with Strut and Tie Models*. Ed. K.H. Reineck, ISBN 0-87031-086-0, Farmington Hills, Michigan, Estados Unidos.
- [4] ACI SP-273 (2011). *Further Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie Models*. Ed. K.H. Reineck y L.C. Novak, 0-87031-392-9, Farmington Hills, Michigan, Estados Unidos.
- [5] Adebar P., Kuchma D. y Collins M.P. (1990). *Strut-and-Tie Models for the Design of Pile Caps: An Experimental Study*. ACI Structural Journal, Jan.-Feb. 1990, pp.81-92.
- [6] Adebar P., Zhou L. (1996). *Design of Deep Pile Caps by Strut-and-Tie Models*. ACI Structural Journal, V.93, No. 4, pp. 437-447.
- [7] Ali M.A., White R.N. (2001). *Automated Generation of Truss Model for Optimal Design of Reinforced Concrete Structures*. ACI Structural Journal, V.98, No.4, Jul-Ago 2007, pp.431-442.
- [8] Anderheggen E. y Schlaich M. (1990). *Computer Aided Design of Reinforced Concrete Structures using the Truss Model Approach*. Proceedings of the Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Zell am See, Austria, Abr. 1990, pp.539-550.
- [9] Bairán J.M. (2012). *Generación automática de esquemas de bielas y tirantes considerando criterios constructivos*. Hormigón y Acero, V.63, No.264, abril-junio, pp. 67-79.
- [10] Benabdallah S., Ramírez J.A., Lee R.H. (1989). *Computer Graphics in Truss-Model Design Approach*. Journal of Computing in Civil Engineering, ASCE, V.3, No.3, July 1989, pp.285-301.

- [11] Bergmeister K., Breen J.E., Jirsa J.O. y Kreger M.E. (1993). *Detailing for structural concrete*. Research Report 1127-3F, Center for Transportation Research University of Texas Austin, Austin, TX, 300 pp.
- [12] Blévoit J., Frémy R (1967). *Smelles sur Pieux*. Annales, Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics (Paris), V.20, No. 230, Feb. 1967, pp.223-295.
- [13] Chantelot G. y Mathern A. (2010). *Strut-and-tie modeling of reinforced concrete piles*. Master of Science Thesis, Chalmer University of Technology. Goteborg, Suecia, pp. 207.
- [14] Chuan-zhi W., Zhen-hai G., y Xiu-qin Z. (1987). *Experimental Investigation of Biaxial and Triaxial Compressive Concrete Strength*. ACI Materials Journal, Mar.-Abr. 1987, pp. 92-100.
- [15] Clarke J.L. (1973). *Behaviour and Design of Pile Caps with Four Piles*. Technical Report No.42.489, Cement and Concrete Association, London, Nov. 1973, pp.35-39.
- [16] CSA (2004). *Design of Concrete Structures*. A32.3-04, Canadian Standard Association, Ontario, Canadá, 232 pp.
- [17] Delgado Bueno C. (2008). *Modelización numérica del comportamiento adherente acero-hormigón en presencia de compresión transversal*. Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Valencia.
- [18] EC-2 (2004). *Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1.1: General rules and rules for buildings*. CEN EN 1992.1.1:2004, 225 pp.
- [19] EHE-08 (2008). *Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08*. 1ª Edición, Comisión Permanente del Hormigón, Ministerio de Fomento, Madrid, 722 pp.
- [20] Felipa C.A. (2012). *Apuntes de la asignatura Advanced Finite Elements for Solids, Plates and Shells*. Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder.
- [21] FIB (2002). *Design examples for the 1996 FIP recommendations – Practical design of structural concrete*. Technical Rep., International Federation for Structural Concrete, Londres.
- [22] FIB Bulletin No.45 (2008). *Practitioner's guide to finite element modelling of reinforced concrete structures*. ISBN 978-2-99394-085-7, Lausanne, 344 pp.
- [23] FIB Bulletin No.61 (2011). *Design examples for strut-and-tie models*. ISBN 978-2-88394-101-4, Lausanne, 219 pp.
- [24] Gu Q. Sun CH., Peng SH (2009). *Experimental Study on 3D Strut-and-Tie Analogy*. Key Engineering Materials, Vol. 400-402, pp.917-922.
- [25] Kuchma D., Yindeesuk S., Nagle T., Hart J., Lee H.H. (2008). *Experimental Validation of Strut-and-Tie Method for Complex Regions*. ACI Structural Journal, Sept.-Oct. 2008, pp. 578-589.
- [26] Ley M.T., Riding K.A., Widiyanto, Bae S y Breen J.E. (2007). *Experimental Verification of Strut-and-Tie Model Design Method*. ACI Structural Journal, Nov.-Dec. 2007, pp. 749-755.
- [27] Leu L.J., Huang C.W., Chen C.S., M.ASCE y Liao Y.P. (2006). *Strut-and-Tie Design Methodology for Three-Dimensional Reinforced Concrete Structures*. Journal of Structural Engineering, June 2006, pp.929-938.
- [28] Liang Q.Q., Uy B., M.ASCE y Grant P. S (2002). *Performance-Based Optimization for Strut-and-Tie Modeling of Structural Concrete*. Journal of Structural Engineering, Junio 2002, pp. 815-823.
- [29] Marti P. (1985). *Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design*. ACI Journal, V.82, No. 4, pp. 46-56.
- [30] MatLab 7.12.0 (R2011a). Software, The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, Estados Unidos.

- [31] Miguel P.F., Fernández M.A., Bonet J.L., Martí J.R., Navarro K., Castro M.C. y Pallarés L. (2009). *Proyecto de Estructuras de hormigón mediante el Método de las Bielas y Tirantes*. 2ª Ed. Ediciones Vj, ISBN 978-84-96937-82-6, Valencia, 346 pp.
- [32] Miguel P.F., Fernández M.A., Bonet, J.L., Pastor J.M. (2002). *Modelo automático para determinar el esquema de bielas y tirantes de una región D de forma cualquiera*. II Congreso de ACHE.
- [33] Miguel P.F. y Pallarés L. (2011). *Apuntes de la asignatura Proyecto de Elementos Estructurales de Hormigón*. Máster en Ingeniería del Hormigón, Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Valencia.
- [34] Miguel P.F. y Fernández M.A. (2011). *Apuntes de la asignatura Modelización de Estructuras de Hormigón mediante Elementos Finitos*. Máster en Ingeniería del Hormigón, Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Valencia.
- [35] Mörsch, E. (1908). *Der Eisenbetonbauer, seine Theorie und Anwendung*. Verlag von Konrad Witter, 3º Ed.
- [36] Park J., Yindeesuk S., Tjhin T. y Kuchma D. (2010). *Automated Finite-Element-Based Validation of Structures Designed by Strut-and-Tie Method*. Journal of Structural Engineering, ASCE, Feb., pp.203-210.
- [37] Ritter, W. (1899). *Die Bauweise Hennebique*. Schweizerische Bauzeitung. XXXIII, Nº7, pp.41-61.
- [38] Rückert K.J. (1991). *Design and Analysis with Strut-and-Tie Models- Computer Aided Methods*. Structural Concrete, IABSE Colloquium, Stuttgart, International Association for Bridge and Structural Engineering, Mar. 1991, pp. 379-384.
- [39] Sabnis G.M. y Gogate A.B. (1984). *Investigation of Thick Slabs (Pile Cap) Behavior*. ACI Journal, Proceedings V.81, No.1, Jan.-Feb. 1967, pp.223-295.
- [40] Schlaich J., Schäfer K.. y Jennewein M. (1987). *Toward a consistent design of reinforced structural concrete*. Journal of prestressed concrete institute, V. 32, No. 3, pp. 74-150.
- [41] Schlaich J., Schäfer K. (2001). *Konstruieren im Stahlbetonbau*. Betonkalender 90, Ersnt & Sohn Verlag, Berlin, pp.563-715.
- [42] Sola García C., Miguel Sosa P.F., Pallarés Rubio L., Mata Falcón J. (2011). *Aplicación de la Herramienta Informática MEFBT para el Diseño y Análisis de Ensayos Experimentales de Apoyos a Media Madera*. V Congreso de ACHE, ISBN 978-84-89670-62-4, Valencia.
- [43] Souza R., Kuchma D., Park J., y Bittencourt T. (2007). *Non-Linear Finite Element Analysis of Four-Pile Caps Supporting Columns Subjected to Generic Loading*. Computers and Concrete, V. 4, No. 5, pp.363-376.
- [44] Souza R., Kuchma D., Park J.W., y Bittencourt T. (2009). *Adaptable Strut-and-Tie Model for Design and Verification of Four-Pile Caps*. ACI Structural Journal, Mar.-Abr. 2009, pp. 142-150.
- [45] Suzuki K., Otsuki K., y Tsubata T. (2000). *Influence of Edge Distance on Failure Mechanism of Pile Caps*. Transactions of the Japan Concrete Institute, V.22, pp. 361-367.
- [46] Suzuki K., Otsuki K., Tsubata T. (1998). *Influence of Bar Arrangement on Ultimate Strength of Four-Pile Caps*. Transactions of the Japan Concrete Institute, V.20, pp.195-202.
- [47] Tjhin T. y Kuchma D. (2002). *Computer-Based Tools for Design by Strut-and-Tie Method: Advances and Challenges*. ACI Structural Journal, V.99, No. 5, Sept-Oct 2002, pp. 586-594.
- [48] Tjhin T. y Kuchma D. (2004). *CAST – Computer-Aided Strut-and-Tie*. University of Illinois at Urbana-Champaign, disponible gratuitamente www.dankuchma.com/stm/CAST

- [49] Tjhin T.N., Kuchma D. (2007). *Integrated analysis and design tool for the strut-and-tie method*. Engineering Structures, V.29 (2007), pp.3042-3052.
- [50] Vecchio F.J. y Collins M.P. (1986). *Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements subjected to Shear*. ACI J. Proceedings, Vol. 83, No.2, pp. 219-231.
- [51] Yun Y.M. (2000). *Computer Graphics for Nonlinear Strut-and-Tie Model Approach*. Journal of Computing Engineering, Abr. 2000, pp.127-133.
- [52] Zienkiewick, O.C. (1982). *El método de los elementos finitos*. Reverté, Barcelona.